Lineární algebra III 7. 2. 2020

Jméno: ....

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Celkem

1. (6 × 1 bod) Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků (+1 bod za správnou odpověď, −1 bod za špatnou odpověď, 0 bez odpovědi, výsledný počet bodů je max{součet bodů, 0}):

(a) **ano** – **ne** Každý neprázdný polyedr má nějaký vrchol.

(b) **ano** – **ne** Platí

$$\min\{cx \mid Ax \geq b, x \geq 0\} = \max\{yb \mid c \geq yA, y \geq 0\},$$

pokud obě strany existují.

(c) **ano** – **ne** Pro antisymetrické tenzory $\alpha, \beta \in \Lambda^2 U$ vždy platí $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$.

(d) **ano** – **ne** Na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{C}$ existuje jediná orientace.

(e) **ano** – **ne** Každý nenulový kvaternion $q \neq 0$ má inverzi q^{-1}.

(f) **ano** – **ne** Smithův normální tvar matice $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda^3 - \lambda \\ \lambda^6 & \lambda \end{pmatrix}$ je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - \lambda^6(\lambda^3 - \lambda) \end{pmatrix}$.

2. (6 × 2 body) Stručně a jasně odpovězte. Svá tvrzení zdůvodněte.

(a) Na příkladu $P\colon -1 \leq x \leq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$ (namalujte si obrázek!) demonstrujte, jak lze popsat stěny polyedru $P\colon Ax \geq b$ (**všechny**, ne jen maximální) pomocí podsystémů nerovnic systému $Ax \geq b$ zadávajícího P.

(b) Zformulujte Farkasovo lemma pro polyedry (nehomogenní systémy nerovnic).

(c) Nechť α je báze prostoru U a nechť α^* je duální báze prostoru U^*. Vyjádřete souřadnice formy $\eta \in U^*$ v bázi α^* pomocí prvků báze α. Své tvrzení **dokažte**.

(d) Lineární zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ má vlastní čísla 2, 1, −1. **Odvoďte**, čemu se rovná stopa zobrazení $\varphi^{\wedge 2}\colon \Lambda^2\mathbb{R}^3 \to \Lambda^2\mathbb{R}^3$.

(e) Definujte vektorový součin, nezapomeňte uvést všechny předpoklady. Kdy je vektorový součin dvou vektorů nulový?

(f) Najděte nějakou reálnou (nebo alespoň komplexní) matici A, pro kterou Smithův normální tvar matice $(A - \lambda E)$ je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

3. (8 bodů) Určete **minimum** lineární funkce $2x_1 + x_2 + x_4 + x_5$ na polyedru $P \subseteq \mathbb{R}^5$ daném soustavou nerovnic

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -\,x_2 & +\,x_3 & & +\,x_5 & \geq 3 \\ -2x_1 & +\,x_2 & & +\,x_4 & & \leq 0 \\ & 2x_2 & -\,x_3 & +\,x_4 & & \geq 3 \\ & & & x_4 & +\,x_5 & \leq 3 \end{array} \qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

(některé nerovnosti $\geq$, některé $\leq$) a **všechny body** této podmnožiny, ve kterých je minima dosaženo.

4. (3 body) Nechť V je vektorový prostor s bází $\alpha = (e_1, e_2, e_3)$ a duální bází (f^1, f^2, f^3). Tenzor $t \in T_1^2 V$ má v bázi α souřadnice $t_k^{ij} = k$. Najděte jeho **souřadnici** $\bar{t}_3^{12}$ v bázi $\beta = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, jestliže pro duální bázi $\beta^* = (\bar{f}^1, \bar{f}^2, \bar{f}^3)$ platí

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{f}^1 \\ \bar{f}^2 \\ \bar{f}^3 \end{pmatrix}.$$

5. (3 body) Popište pomocí **osy a úhlu** složení $S \circ R$ rotace R okolo vektoru $(1, 0, -1)$ o úhel $+90°$ s rotací S okolo vektoru $(1, -2, 1)$ o úhel $+120°$.

6. (4 body) Spočtěte **Smithův normální tvar** celočíselné matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

zadávající homomorfismus grup $\varphi\colon \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}^4$. Poté **rozložte** $\mathbb{Z}^4 / \operatorname{im} \varphi$ na součin cyklických grup, jejichž řády jsou mocniny prvočísel.