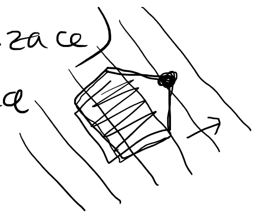
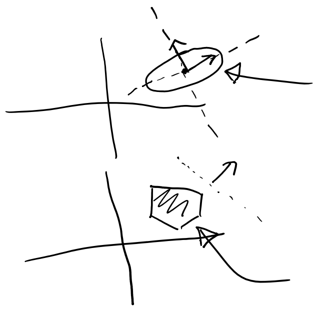
# Organizační záležitosti

- učební text: - math.muni.cz/~koren (neaktuální)
  - studijní materiály
- cvičení distančně, možná časem online / domácí úlohy
  - stejné jako přednášek
  - max 3 neúčasti
- 2 vnitrosemestrální písemky (realizace?)
  - potřeba > 50% bodů
- závěrečná písemka + ústní zkouška
- obsah:
  - kuželosečky (velice zběžně)
  - polyedry + lin. progr. (lin. optimalizace)
  - multilineární algebra + objemy, orientace
  - celočíselné a polynomiální matice
    - ∟ Jordanův k.t.



# Afinní prostory = vektorový prostor bez volby počátku

motivace:

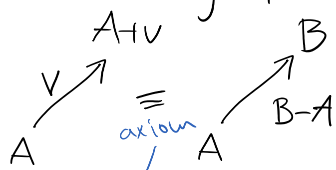


vhodná báze, počátek různý od 0
— afinní báze
jinak ... potřebujeme posunutí
— afinní zobrazení, nikoliv lineární

motivace: konvexní podmnožina, počátek nepodstatný

motivace: prostor okolo nás nemá počátek — nebo spousta voleb

**Def.** Afinní prostor se skládá z následujících dat:
- množina bodů $\mathcal{A}$
- množina vektorů $V = \operatorname{Dir} \mathcal{A}$ ... zaměření af. pr. $\mathcal{A}$
  └ vektorový prostor (operace + axiomy)
- další operace:
  $+ : \mathcal{A} \times V \longrightarrow \mathcal{A}$
  $- : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow V$

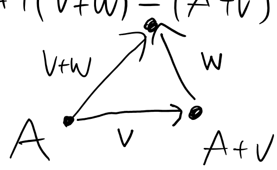



(případně $\overrightarrow{AB} = B - A$)

$(A+v) - A = v$
$A + (B-A) = B$
} vzájemně inverzní zobrazení viz dál

další axiomy:
akce $V$ na $\mathcal{A}$ $\begin{cases} \bullet\ (A+v)+w = A+(v+w) \\ \bullet\ A+0 = A \end{cases}$

$A+(v+w) = (A+v)+w$




└ společně s předchozím: je to jednoduše tranzitivní akce
└ $\forall A, B \in \mathcal{A} : \exists!\, v \in \operatorname{Dir} \mathcal{A} : A + v = B$
(protože to je ekvivalentní $v = B - A$ )

G grupa
$g \mapsto g^{-1}$ operace

**Př.** Typickým příkladem je samozřejmě
- libovolný afinní podprostor vektorového prostoru
  obě operace $+, -$ se dědí z vekt. pr.
- zejména tedy celý vektorový prostor — $\operatorname{Dir} V = V$
- prostor okolo nás ... co je počátek?
  (nebo třeba tabule)

$0 \in \mathcal{A}$ zadává zobrazení $\operatorname{Dir} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ – je to bijekce
$v \longmapsto 0 + v$

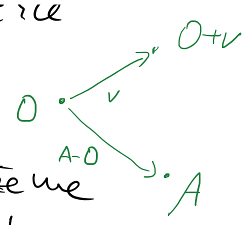
0+v

$O \in A$ zadává zobrazení $\operatorname{Dir} A \to A$ – je to bijekce

$\parallel$

„volba počátku"

$$v \mapsto O+v$$
$$A-O \leftarrow\!\!\shortmid A$$




a tedy o afinním prostoru můžeme přemýšlet jako o vektorovém prostoru kde počátek není pevně zvolen.

**Báze, souřadnice**

$0 \cdot 1$ … nedává smysl – body násobit skaláry nelze

$$O \in A \longrightarrow \begin{array}{c} A \\ \cong \\ \operatorname{Dir} A \end{array} \qquad \begin{array}{c} O + x^1 \cdot e_1 + \dots + x^n \cdot e_n = \underbrace{(O, e_1, \dots, e_n)}_{\text{(afinní) báze}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}}_{\text{souřadnice}} \\ \uparrow \\ x^1 \cdot e_1 + \dots + x^n \cdot e_n \\ \uparrow \\ (x^1, \dots, x^n)^T \end{array}$$

$$\text{báze } \operatorname{Dir} A \longrightarrow \cong$$
$$(e_1, \dots, e_n) \qquad \mathbb{k}^n$$

$O \in A$ počátek (libovolný)
$(e_1, \dots, e_n)$ báze $\operatorname{Dir} A$

Př. standardní afinní prostor = prostor souřadnic (dimenze $\underline{n}$)

$$A_n = \{(1, x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{k}^{n+1}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{k}^{n+1} \mid x^0 = 1\}$$

– std. báze $\mathbb{k}^{n+1}$ je bází $A_n$; $E_0$ bod, $e_1, \dots, e_n$ vektory

Báze tedy dává bijekci (izomorfismus)

$\mathcal{B} = \{Ax = b\}$
$\operatorname{Dir} \mathcal{B} = \{Ax = 0\}$

$$A_n \xrightarrow{\cong} A$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \longmapsto \underset{(e_1, \dots, e_n)}{\underset{\parallel}{(O, \alpha)}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = O + \alpha \cdot x$$

inverze = souřadnice

Pozn. Brát $A_n$ jako std. af. pr. (narozdíl od $\mathbb{k}^n$) je výhodné také proto, že $A_n \neq \operatorname{Dir} A_n$ a vidíme rozdíl mezi body $(1, x^1, \dots, x^n) = [x^1, \dots, x^n]$ a vektory $(0, x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n)$

Dostáváme pak také kombinace odpovídající vektorům ze zaměření

$$(O, \alpha) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \alpha \cdot x \in \operatorname{Dir} A$$

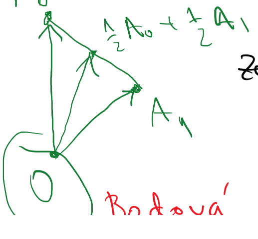
---

Alternativně: afinní kombinace

$$t^0 \cdot A_0 + \dots + t^k \cdot A_k \overset{\text{def}}{=} O + t^0 (A_0 - O) + \dots + t^k (A_k - O)$$

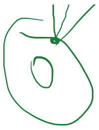
za předpokladu $t^0 + t^1 + \dots + t^k = 1$

($\Leftrightarrow$ koef. u $O$ je nulový … tak by to na volbě $O$ nemělo záviset Cv. dokažte)

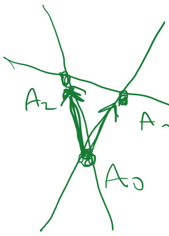



Bodová báze:

(⇐) koef. u O je nulový ... volbě O nemělo záviset Cv. dokažte)




**Bodová báze:** (n+1)-tice bodů $E_0,\dots,E_n$ t.ž. každý bod lze jednoznačně vyjádřit jako afinní kombinaci těchto bodů

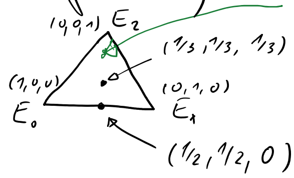



Cv. ⇔ $(E_0, E_1-E_0,\dots,E_n-E_0)$ je afinní báze

$$\begin{pmatrix}t^0\\ \vdots\\ t^n\end{pmatrix} \longmapsto \underbrace{(E_0,\dots,E_n)}_{\text{bodová báze}}\underbrace{\begin{pmatrix}t^0\\ \vdots \\ t^n\end{pmatrix}}_{\text{barycentrické souřadnice}} \overset{\exists!}{=} A$$

$t^0+\dots+t^n=1$

je bijekce (izomorfismus)




$B_n \longrightarrow A$

$B_n = \{t\in \mathbb{k}^{n+1} \mid t^0+\dots+t^n=1\}$ ← $B_n$ je prostor tzv. barycentrických souřadnic

std. báze $\mathbb{k}^{n+1}$ je bodovou bází $B_n$; $E_0,\dots,E_n$ body

**Pozn.** Výhodou afinních kombinací je, že se jedná o operace pracující pouze s body ⇒ lze af. pr. definovat jako alg. struktura: mn. A + operace

$$B_n\times \underbrace{A\times\dots\times A}_{(n+1)\text{-krát}} \longrightarrow A \quad \dots \text{ axiomy složitější (výrazně)}$$

$$((t^0,\dots,t^n),(A_0,\dots,A_n)) \longmapsto t^0A_0+\dots+t^nA_n$$

**Konstrukce:** Každý afinní prostor lze vložit do vektorového prostoru jakožto afinní nadrovinu neprocházející počátkem, viz příklad $A_n \subseteq \mathbb{k}^{n+1}$ — dim o 1 menší


— nebudeme formalizovat, vystačíme si s příkladem $A_n$ a jeho afinních podprostorů

Cv. Popište tento vekt. prostor pro $\mathcal{B}\subseteq A_n$ lib. af. podpr. jakožto $[\mathcal{B}] = \mathrm{Dir}\,\mathcal{B} + \mathbb{k}\cdot B$ pro $B\in\mathcal{B}$

**Def.** Afinní podprostor = podmn. $\mathcal{B}\subseteq A$ a podmn. Dir A uzavřená na veškeré operace

- $\mathcal{B}=\emptyset$ zvlášť, nebudeme rozebírat
- $\mathcal{B}\neq\emptyset$ ... pak $\mathrm{Dir}\,\mathcal{B} = \{B-A \mid A,B\in\mathcal{B}\}$ je jednoznačně určeno z $\mathcal{B}$; ekvivalentně $\mathcal{B}$ uz. na afinní komb.

**Def** Afinní zobrazení se skládá z:

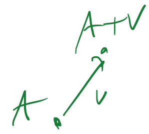
$\varphi : A \to B$

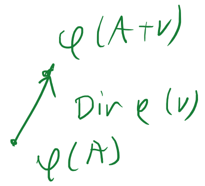
$\operatorname{Dir}\varphi : \operatorname{Dir} A \to \operatorname{Dir} B$ — lineární zobrazení

které dohromady splňují

$$\varphi(A+v) = \varphi(A) + \operatorname{Dir}\varphi(v)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Dir}\varphi(B-A) = \varphi(B) - \varphi(A)$$




Opět, pokud $A \neq \emptyset$, druhá podmínka implikuje, že $\operatorname{Dir}\varphi$ je jednoznačně určeno z $\varphi$, $\operatorname{Dir}\varphi(v) = \varphi(O+v) - \varphi(O)$

∟ indukované lineární zobrazení

Bijekce vystupující v části o bázích jsou afinní

$$A_n \longrightarrow A$$
$$\binom{1}{x} \longmapsto O + \alpha \cdot x$$

(indukované lin. zobr. je dáno „lin. částí"
$$\binom{0}{x} \longmapsto \alpha \cdot x \;)$$

Cv. Vztah afinních a lineárních zobrazení.

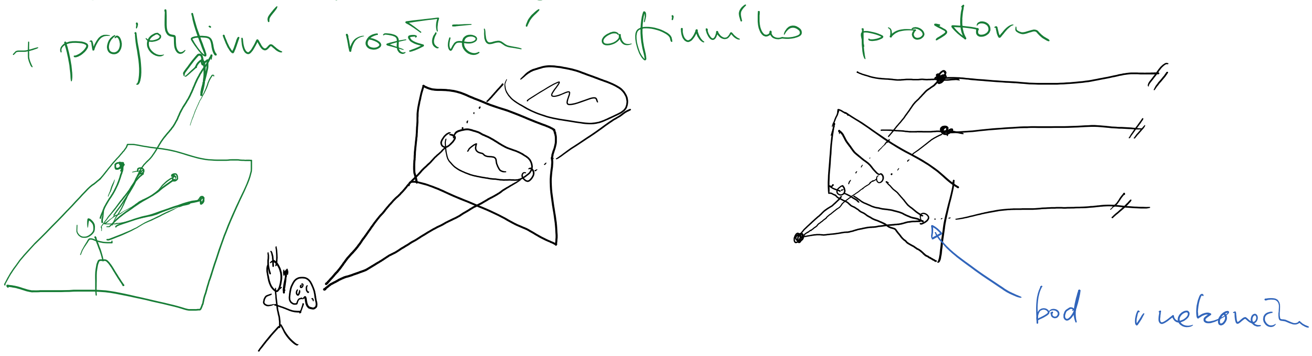
$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{\text{afinní}} & A_m \\ \cap & & \cap \\ k^{n+1} & \underset{\text{lin}}{\dashrightarrow} & k^{m+1} \end{array}$$

nějaká lin. zobr.

END

# Projektivní prostory

+ projektivní rozšíření afinního prostoru




Body na „plátně" odpovídají (polo)přímkám
– nad obecným tělesem dávají smysl pouze přímky

<u>Def.</u> Nechť $V$ je vektorový prostor.
**Projektivním prostorem** s aritmetickým základem $V$ rozumíme množinu $\mathbb{P}(V) = \{L \subseteq V \mid L \text{ vekt. podpr. dim } 1\}$

Zjevně pro $v \neq 0$ máme $[v] \in \mathbb{P}(V)$

$$[-] : V \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(V)$$

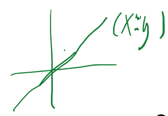
přičemž $[v] = [w] \iff w = k \cdot v$ pro nějaké $k \in \mathbb{k}^+$
Dostáváme tedy bijekci

$$V \setminus \{0\} / \mathbb{k}^\times \longrightarrow \mathbb{P}(V)$$

relace $v \sim w \iff \exists k \in \mathbb{k}^\times : w = k \cdot v$
jde o prostor orbit akce $\mathbb{k}^\times$ na množině $V \setminus \{0\}$

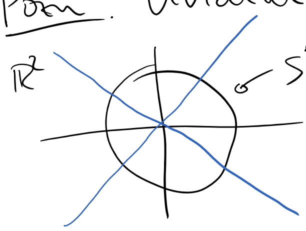
<u>Př.</u> $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1})$

$[(x^0, \dots, x^n)] =: (x^0 : \dots : x^n)$ – zde předpokládáme alespoň jedno $x^i \neq 0$




Dimenze projektivního prostoru $\mathbb{P}(V)$ je $\dim V - 1$.

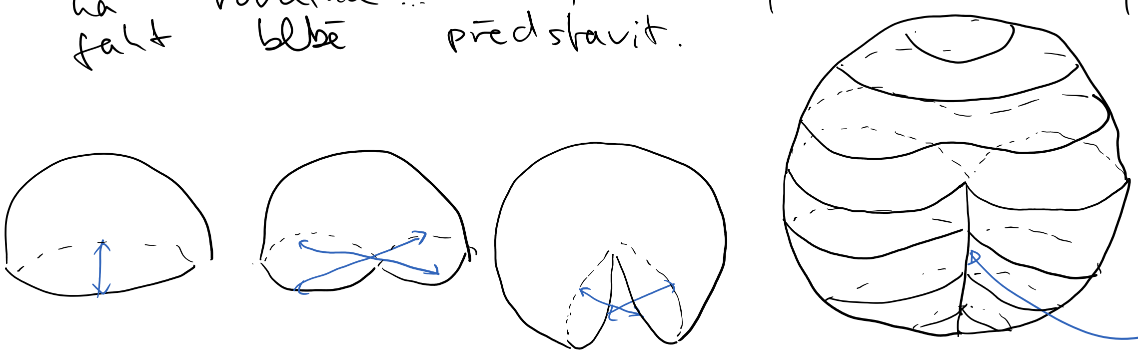
<u>Pozn.</u> Uvidíme za chvíli, že to dává smysl,



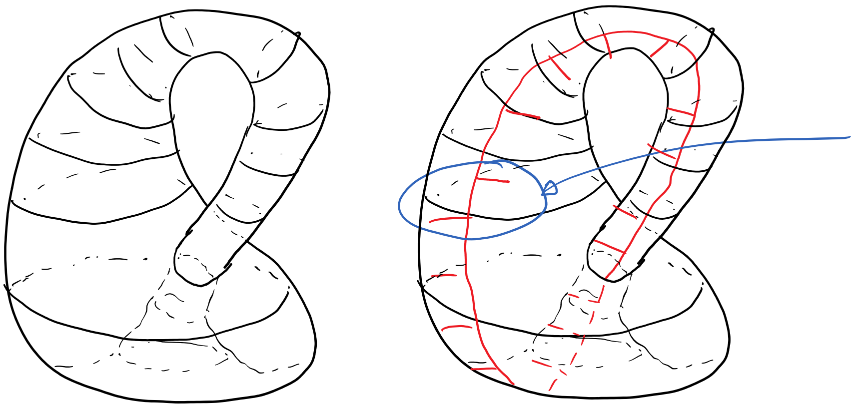

$S^1$ obsahuje z každé přímky 2 body
zobrazení $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{[-]} \mathbb{P}_1$
je „dvojnásobné nakrytí"
(každý bod má právě 2 vzory)
a proto jsou dimenze stejné

Dostaneme $\mathbb{P}_1$ z $S^1$ tak, že protilehlé body „ztotožníme" nebo o něco představitelněji, vezmeme pouze horní půlkružnici a ztotožníme krajní body ⇒ opět kružnice

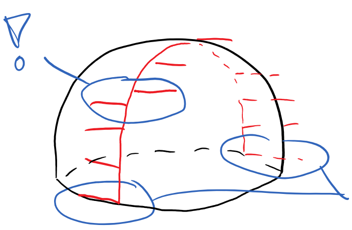
To samé pro $P_2$: buď na $S^2$ ztotožníme všechny dvojice protilehlých bodů nebo vezmeme severní hemisféru a ztotožníme pouze protilehlé body na rovníku ... v $\mathbb{R}^3$ nelze, takže si to jde fakt blbě představit.




Podobnou plochou je např. Kleinova láhev.




Projektivní rovina je také neorientovatelná:




Def. Projektivní podprostor je podmnožina tvaru
$P(W) \subseteq P(V)$ pro lib. vekt. podpr. $W \subseteq V$.
speciálně: $W = L$ dimenze 1 ... $P(W) = \{L\}$ ... proj. podpr. dimenze 0 = bod

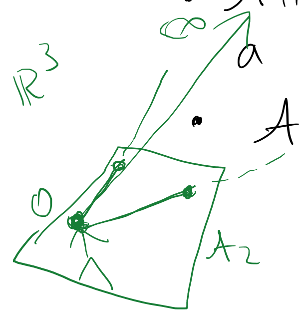
## Projektivní rozšíření afinního prostoru

Nechť nyní $A$ je afinní prostor vložený do vektorového prostoru $V$ jakožto nadrovina

neprocházejí počátkem.
(viz příklad s plátnem)

dimenze o 1 menší

Body $P(V)$, tj. vekt. podpr. $L \subseteq V$ dimenze 1 lze rozdělit do dvou disjunktních skupin




- $A \cap L = \emptyset$, pak $L \parallel A$, tj. $L \subseteq Dir\, A$ a lze tedy psát $L \in P(Dir\, A)$
- $A \cap L \neq \emptyset$, pak tento průnik je jediný bod

$$P(V) \setminus P(Dir\, A) \xrightarrow{\cong} A$$
$$L \longmapsto A \cap L$$

a naopak každým bodem prochází jediná přímka $L$

Dohromady tak

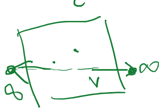
$$P(V) = (P(V) \setminus P(Dir\, A)) \sqcup P(Dir\, A)$$
$$\cong A \sqcup \nu(A) =: \bar{A}$$ projektivní rozšíření $A$

přímky = vlastní body $A$

$\subset$ tzv. nevlastní nadrovina $\nu(A) \overset{def}{=} P(Dir\, A)$
přímky = nevl. body $A$ = směry v $A$

Př. $A = A_n \subseteq \mathbb{k}^{n+1} = V$
$\bar{A}_n = P(\mathbb{k}^{n+1}) = P_n$

$\bar{A}_2$ Rozdělení bodů na vlastní a nevlastní




- $(x^0 : x^1 : \dots : x^n)$ je nevlastní, jestliže tato přímka leží v $Dir\, A_n = \{x^0 = 0\}$, tj. jestliže $x^0 = 0$
- $(x^0 : x^1 : \dots : x^n)$ je vlastní, jestliže $x^0 \neq 0$ a průnik s $A_n = \{x^0 = 1\}$ je pak právě bod

$$\frac{1}{x^0}(x^0, x^1, \dots, x^n) = \left(1, \frac{x^1}{x^0}, \dots, \frac{x^n}{x^0}\right)$$

směr vektoru $(x^1, \dots, x^n)$
nevl.
$(0 : x^1 : \dots : x^n)$
$(1 : x^1 : \dots : x^n)$
vl. $[x^1, \dots, x^n]$

(hezčí popis: vlastní body $\bar{A}_n$ jsou právě body $(1 : x^1 : \dots : x^n)$ odpovídající $(1, x^1, \dots, x^n) \in A_n$)

Zásadní rozdíl $\bar{A}_2$ oproti $A_2$ je, že nyní i rovnoběžné přímky mají průnik (akorát „v nekonečnu", tj. bude jim nevlastní bod):

$$\bar{A}_2 \supseteq \underbrace{P(V)}_{\dim 1} \cap \underbrace{P(W)}_{\dim 1} = P(\underbrace{V \cap W})$$ obsahuje bod

$\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim(V+W)$

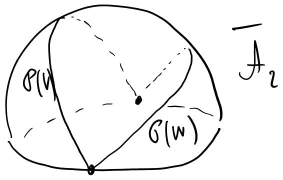
$A_2 = \underbrace{v(\cdot)}_{\dim 1} \cdot\cdot \underbrace{v(\cdot)}_{\dim 1}$

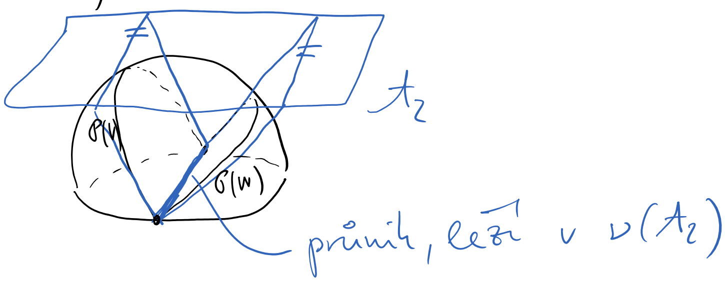
tj. $\dim V = 2 = \dim W$

$$\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim(V+W) \geq 2 + 2 - 3 = 1$$

$(\dim(V+W) \leq 3)$

tj. $\dim P(V \cap W) \geq 0$




Def. Kolineace je zobrazení tvaru

$\Phi : P(V) \to P(W)$, $\Phi([v]) = [\varphi(v)]$

kde $\varphi : V \to W$ je lineární izomorfismus. Píšeme $\Phi = [\varphi]$.

alespoň injektivní

Cv. $\varphi$ je určeno jednoznačně až na násobek.

Cv. Vztah kolineací $\bar{A} \to \bar{B}$ a afinních zobrazení $A \to B$.

END