Symetrické a antisymetrické tenzory

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(\otimes^p U, V) & \overset{\mathrm{sym}}{\supseteq} & \mathrm{Hom}(S^p U, V) & \Rightarrow & S^p U \text{ je } \dots \\ \wr\wr & & \wr\wr & & \\ \mathrm{Lin}_p(U, \dots, U; V) & \overset{\mathrm{sym}}{\supseteq} & \mathrm{Lin}_p(U, \dots, U; V)_{\mathrm{sym}} & & \end{array}$$

— odpovídá $S^p U \subseteq \otimes^p U$

kvocient

$$\begin{tikzcd} \otimes^p U \arrow[r] \arrow[d, "pr"'] & V \\ S^p U \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Definice. Řekneme, že p-lineární zobrazení $\Phi : U \times \dots \times U \to V$ je *symetrické*, jestliže pro každou permutaci $\sigma \in \Sigma_p$ platí

$$\begin{array}{ccc} \Phi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)}) & = & \Phi(u_1, \dots, u_p) \\ \| & & \| \\ G(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)}) & & G(u_1 \otimes \dots \otimes u_p) \end{array}$$

$\rho_\sigma : \otimes^p U \to \otimes^p U$

$u_1 \otimes \dots \otimes u_p \mapsto u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)}$

tj. budeme chtít $u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)} - u_1 \otimes \dots \otimes u_p \in \ker G$

Definice. Definujme *symetrickou mocninu* $S^p U$ jakožto kvocient

$$S^p U = \otimes^p U / \mathrm{span}\{u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)} - u_1 \otimes \dots \otimes u_p \mid \sigma \in \Sigma_p,\ u_1, \dots, u_p \in U\}$$

$$= \mathrm{span}\{\rho_\sigma(t) - t \mid \sigma \in \Sigma_p,\ t \in \otimes^p U\}$$

$= \sum \mathrm{im}(\rho_\sigma - \mathrm{id})$

t lin. komb. $u_1 \otimes \dots \otimes u_p$

$\rho_\sigma(t) - t$ lin. komb. $u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)} - u_1 \otimes \dots \otimes u_p$

Označme $pr : \otimes^p U \to S^p U$ kanonickou projekci

$$pr(u_1 \otimes \dots \otimes u_p) = \text{třída } u_1 \otimes \dots \otimes u_p =: u_1 \vee \dots \vee u_p = u_1 \cdots u_p$$

Protože

$$\begin{array}{ccc} pr(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)}) & \overset{\text{rozdíl } 0 \text{ v kvocientu}}{=} & pr(u_1 \otimes \dots \otimes u_p) \\ \| & & \| \\ u_{\sigma(1)} \vee \dots \vee u_{\sigma(p)} & & u_1 \vee \dots \vee u_p \end{array}$$

Př. $\mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}\cdot n$
$= \mathbb{Z}/(n=0)$

$2 \cdot 3 = 1$ v $\mathbb{Z}/5$ ($5+1$)

je tento součin vektorů komutativní, lépe symetrický:

$$\begin{tikzcd} \Pi^p U \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "t"'] \arrow[dd, bend right, "t^{\mathrm{sym}}\ \mathrm{sym}\ p\text{-lin}"'] & V \\ \otimes^p U \arrow[ur, dashed, "\exists! G"] \arrow[d, "pr"'] & \\ S^p U \arrow[uur, dashed, "\exists! F"'] & \end{tikzcd}$$

$(u_1, \dots, u_p) \longmapsto u_1 \vee \dots \vee u_p$

Φ sym. p-lin.

$\Rightarrow$ ex. jediné G lineární a

$G(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)} - u_1 \otimes \dots \otimes u_p) = 0$

$\Rightarrow$ ex. jediné F lineární

$$F(u_1 \vee \dots \vee u_p) = \Phi(u_1, \dots, u_p)$$

$G(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)} - u_1 \otimes \dots \otimes u_p)$
$= G(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)}) - G(u_1 \otimes \dots \otimes u_p)$
$= \Phi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)}) - \Phi(u_1, \dots, u_p) \underset{\uparrow}{=} 0$

Φ symetrické

Reformulace. Zobrazení

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(S^p U, V) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Lin}_p(U, \dots, U; V)_{\mathrm{sym}} \\ F & \longmapsto & F \circ t^{\mathrm{sym}} \end{array}$$

je bijekce.

Poznámka. Dá se ukázat, že $(S^p U)$ je kvocientem $(T^p U) = (T^p_0 U)$ podle ideálu $\Rightarrow$ je to opět algebra se součinem

$$\begin{tikzcd} T^p U \times T^q U \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "pr \times pr"'] & T^{p+q} U \arrow[d, "pr"] \\ S^p U \times S^q U \arrow[r, dashed, "\vee"] & S^{p+q} U \end{tikzcd}$$

$(t, s) \longmapsto t \otimes s$

$(u_1 \otimes \dots \otimes u_p, v_1 \otimes \dots \otimes v_q) \longmapsto u_1 \otimes \dots \otimes u_p \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_q$

respektuje kvocient tzn. lze definovat stejně na třídách

$(u_1 \vee \dots \vee u_p, v_1 \vee \dots \vee v_q) \mapsto u_1 \vee \dots \vee u_p \vee v_1 \vee \dots \vee v_q$

Označme $\underbrace{e_1 \vee \dots \vee e_1}_{a_1 \times} \vee \dots \vee \underbrace{e_n \vee \dots \vee e_n}_{a_n \times} = e_1^{a_1} \cdots e_n^{a_n}$

Označme $\underbrace{e_1 \vee \dots \vee e_1}_{a_1 \times} \vee \dots \vee \underbrace{e_n \vee \dots \vee e_n}_{a_n \times} = e_1^{a_1} \dots e_n^{a_n}$

stejně na třídách $(u_1 \vee \dots \vee u_p, v_1 \vee \dots \vee v_q) \mapsto u_1 \vee \dots \vee u_p \vee v_1 \vee \dots \vee v_q$

$(u_2 \otimes u_1 - u_1 \otimes u_2) \otimes u_3$ ∈ ideál, ∈ algebra $= u_2 \otimes u_1 \otimes u_3 - u_1 \otimes u_2 \otimes u_3$

Věta. $\{e_1^{a_1} \dots e_n^{a_n} \mid a_1 + \dots + a_n = p\}$ tvoří bázi $S^p U$.

Důkaz. Je potřeba ukázat, že $F: S^p U \to V$ je jedn. určeno svými lib. hodnotami na $e_1^{a_1} \dots e_n^{a_n}$. Ekvivalentně $\Phi: U \times \dots \times U \to V$ symetrické p-lineární je jedn. určeno svými lib. hodnotami $\neq (e_1^{a_1} \dots e_n^{a_n}) = F(e_1 \vee \dots \vee e_n) = \Phi(e_1, \dots, e_n)$ na $(e_1, \dots e_1, \dots, e_n, \dots, e_n)$ ... tedy $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ kde $i_1 \le \dots \le i_p$. □

$\Phi(e_1, e_1)$, $\Phi(e_1, e_2)$, $\Phi(e_2, e_2)$, atd

NE $\Phi(e_2, e_1) = \Phi(e_1, e_2)$

Příklad $U = (\Bbbk^n)^*$ s bází $(f^1, \dots, f^n) = (x^1, \dots, x^n)$ ($x^i = f^i$ zobr. $x \mapsto x^i$)

$\Rightarrow S^p(\Bbbk^n)^*$ má bázi $\underbrace{(x^1)^{a_1} \dots (x^n)^{a_n}}_{\text{monomy stupně } p}$ = homogenní polynomy stupně p

$\cong \Bbbk^{(p)}[x^1, \dots, x^n]$

$\Rightarrow S(\Bbbk^n)^* \cong \Bbbk[x^1, \dots, x^n]$ ... známe, z pohledu lin. alg. méně zajímavé

$x \cdot y = y \cdot x$ (S^2), $x \otimes y \neq y \otimes x$ ($\otimes^2$), $x \cdot y$

symetrické tenzory = polynomy

Pozn. symetrie tenzoru $\neq$ symetrie polynomu

Pozn. $\otimes^p U \rightleftarrows S^p U \Rightarrow S^p U$ je izomorfní podprostoru $S^p U \subseteq \otimes^p U$, viz cv.

Antisymetrické tenzory ← char $\Bbbk = 0$

Definice. Řekneme, že p-lineární zobrazení $\Phi: U \times \dots \times U \to V$ je *antisymetrické*, jestliže pro každou permutaci $\sigma \in \Sigma_p$ platí

alternující

$$\Phi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)}) = \Phi(u_1, \dots, u_p) \cdot \operatorname{sign} \sigma$$
$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$
$$G(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)}) \qquad G(u_1 \otimes \dots \otimes u_p) \cdot \operatorname{sign}\sigma$$

$\mathrm{Lin}_p(U, \dots, U; V) \cong \mathrm{Hom}(\otimes^p U, V)$

$\cup \qquad\qquad \cup$

$\mathrm{Lin}_p(U, \dots, U; V)_{alt} \quad \mathrm{Hom}(\Lambda^p U, V)$

$\Phi \qquad\qquad G$

tj. budeme chtít $u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)} - u_1 \otimes \dots \otimes u_p \cdot \operatorname{sign}\sigma \in \ker G$

Definice. Definujme *antisymetrickou mocninu* $\Lambda^p U$ jakožto kvocient

″ vnější mocnina

$$\Lambda^p U = \otimes^p U / \operatorname{span}\{u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)} - u_1 \otimes \dots \otimes u_p \cdot \operatorname{sign}\sigma \mid \sigma \in \Sigma_p, u_1, \dots, u_p \in U\}$$
$$= \operatorname{span}\{\rho_\sigma(t) - t \cdot \operatorname{sign}\sigma \mid \sigma \in \Sigma_p, t \in \otimes^p U\}$$
$$= \Sigma \operatorname{im}(\rho_\sigma - \mathrm{id} \cdot \operatorname{sign}\sigma)$$

Označme $pr: \otimes^p U \to \Lambda^p U$ kanonickou projekci

$$pr(u_1 \otimes \dots \otimes u_p) = \text{třída } u_1 \otimes \dots \otimes u_p =: u_1 \wedge \dots \wedge u_p \quad \text{wedge}$$

$u_1 \otimes \dots \otimes u_p \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_q$

$v_1 \otimes \dots \otimes v_q \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_p$

Protože $pr(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)}) = pr(u_1 \otimes \dots \otimes u_p \cdot \operatorname{sign}\sigma)$ (rozdíl 0 v kvocientu)

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$u_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge u_{\sigma(p)} \qquad u_1 \wedge \dots \wedge u_p \cdot \operatorname{sign}\sigma$$

$\Lambda^p U \ni t$, $\Lambda^q U \ni s$: $t \wedge s = (-1)^{p \cdot q} s \wedge t$

gradovaně komutativní

je tento součin vektorů antikomutativní, lépe antisymetrický:

$$\begin{tikzcd}
\Pi^p U \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "t"'] \arrow[dd, bend right, "t^{alt}"'] & V \\
\otimes^p U \arrow[ur, dashed, "\exists! G"] \arrow[d, "pr"'] & \\
\Lambda^p U \arrow[uur, dashed, "\exists! F"'] &
\end{tikzcd}$$

$(u_1, \dots, u_p) \mapsto u_1 \wedge \dots \wedge u_p$; t^{alt} antisym. p-lin

Φ antisym. p-lin.

$\Rightarrow$ ex. jediné G lineární a $G(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)} - u_1 \otimes \dots \otimes u_p \cdot \operatorname{sign}\sigma) = 0$

$\Rightarrow$ ex. jediné F lineární

$$F(u_1 \wedge \dots \wedge u_p) = \Phi(u_1, \dots, u_p)$$

$u_1 \wedge \dots \wedge u_p$

Reformulace Zobrazení

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^p U, V) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Lin}_p(U, \dots, U; V)_{alt}$$
$$F \longmapsto F \circ t^{alt}$$

je bijekce.

Věta. $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \mid i_1 < \dots < i_p\}$ tvoří bázi $\Lambda^p U$.

Důkaz. Je potřeba ukázat, že $F : \Lambda^p U \to V$ je jedn. určeno svými lib. hodnotami na $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$. Ekvivalentně $\Phi : U \times \dots \times U \to V$ antisymetrické p-lineární je jedn. určeno svými lib. hodnotami na $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$, kde $i_1 < \dots < i_p$.

Nová ingredience: $\Phi(\dots, e_j, e_i, \dots) = (-1) \cdot \Phi(\dots, e_i, e_j, \dots) \Rightarrow$ nulová hodnota. □

prohození = transpozice $\Rightarrow$ znaménko (-1)

$u \wedge u = (-1) \cdot u \wedge u$
$2 \cdot u \wedge u = 0 \overset{\mathrm{char} \neq 2}{\Longrightarrow} u \wedge u = 0$

S posledním řádkem se váže: $u_1 \wedge \dots \wedge u_p = 0$ pokud $u_i = u_j$ pro nějaké $i \neq j$.

Věta. $u_1 \wedge \dots \wedge u_p = 0 \iff$ vektory $u_1, \dots, u_p$ jsou lineárně závislé.

Důkaz. Nechť jsou $u_1, \dots, u_p$ lin. záv., například $u_p = a^1 u_1 + \dots + a^{p-1} u_{p-1}$

$t^{alt}(u_1, \dots, u_{p-1}, a^1 u_1 + \dots + a^{p-1} u_{p-1})$

$$\Rightarrow u_1 \wedge \dots \wedge u_{p-1} \wedge u_p = u_1 \wedge \dots \wedge u_{p-1} \wedge (a^1 u_1 + \dots + a^{p-1} u_{p-1})$$
$$= a^1 \cdot u_1 \wedge \dots \wedge u_{p-1} \wedge u_1 + \dots + a^{p-1} u_1 \wedge \dots \wedge u_{p-1} \wedge u_{p-1}$$
$$= 0 \quad \text{(vždy jeden vektor dvakrát)}$$

Nechť jsou $u_1, \dots, u_p$ lin. nezáv. a doplníme je do báze $u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n$.
Pak $u_1 \wedge \dots \wedge u_p$ je jeden z bázových vektorů $\Lambda^p U \Rightarrow$ je nenulový □

$\Rightarrow \dim \Lambda^p U = \binom{n}{p}$, zjevně

$\dim \Lambda^p U = \#\{i_1 < \dots < i_p\}$
$= \#\{p\text{-prvkové podmn. } \{1, \dots, n\}\}$
$= \binom{n}{p}$

- $\Lambda^p U = 0$ pokud $p > \dim U$
- $\Lambda^n U$ má dimenzi 1 pro $n = \dim U$
  $\ni e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ generátor

Věta. $\varphi : U \to V$ lin. zobr. $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$ báze U, $\bar{\alpha} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ báze V

$$\Rightarrow \Lambda^n \varphi(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \det(\varphi)_{\bar{\alpha}\alpha} \cdot \bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_n$$

nemusí být báze

$$\begin{tikzcd}
\Pi^n U \arrow[r, "\Pi^n \varphi"] \arrow[d, "t"'] & \Pi^n V \arrow[d, "t"] \\
\otimes^n U \arrow[r, dashed, "\otimes^n \varphi"] \arrow[d, "pr"'] & \otimes^n V \arrow[d, "pr"] \\
\Lambda^n U \arrow[r, dashed, "\Lambda^n \varphi"] & \Lambda^n V
\end{tikzcd}$$

$\Lambda^n U \ni e_1 \wedge \dots \wedge e_n$, $\quad \Lambda^n V \ni \bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_n$

$\otimes^n \varphi(u_1 \otimes \dots \otimes u_n) = \varphi(u_1) \otimes \dots \otimes \varphi(u_n)$

$\Lambda^n \varphi(u_1 \wedge \dots \wedge u_n) = \varphi(u_1) \wedge \dots \wedge \varphi(u_n)$

Důkaz. Jedná se o výpočet:

$\varphi(u) = \sum \underbrace{a^i_j u^j}_{A \cdot [u]_\alpha} \cdot \bar{e}_i$, $\quad A = (\varphi)_{\bar{\alpha}\alpha}$

$\varphi(e_1) = \sum a^i_j \delta^j_1 \bar{e}_i = \sum a^i_1 \bar{e}_i$

$$\Lambda^n \varphi(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \overset{\text{"def"}}{=} \varphi(e_1) \wedge \dots \wedge \varphi(e_n)$$
$$= \Big(\sum_{i_1} a_1^{i_1} \bar{e}_{i_1}\Big) \wedge \dots \wedge \Big(\sum_{i_n} a_n^{i_n} \bar{e}_{i_n}\Big)$$
$$= \sum a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} \; \bar{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{i_n} \qquad i_1 = \sigma(1), \dots, i_n = \sigma(n)$$

$$= \left(\sum_{i_1} a_1^{i_1}\bar{e}_{i_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{i_n} a_n^{i_n}\bar{e}_{i_n}\right)$$

$(\varphi)_{\bar\alpha\alpha}$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_n} a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n}\;\bar{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\bar{e}_{i_n}$$

$\underbrace{i_1=\sigma(1),\dots,i_n=\sigma(n)}$

jinak $\bar{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\bar{e}_{i_n}=0$

$$= \sum_{\sigma} a_1^{\sigma(1)}\cdots a_n^{\sigma(n)}\;\bar{e}_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge\bar{e}_{\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma} a_1^{\sigma(1)}\cdots a_n^{\sigma(n)}\;\operatorname{sign}\sigma\cdot\;\bar{e}_1\wedge\cdots\wedge\bar{e}_n$$

$$= \det\varphi\cdot\;\bar{e}_1\wedge\cdots\wedge\bar{e}_n. \qquad \square$$

Důsledek. $\alpha=(e_1,\dots,e_n)$, $\bar\alpha=(\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n)$ báze U, $(e_1,\dots,e_n)=(\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n)\cdot P$ $\qquad \varphi=id$

$\Rightarrow e_1\wedge\cdots\wedge e_n = \det P\cdot\;\bar{e}_1\wedge\cdots\wedge\bar{e}_n$ $\qquad \dots\; P=(id)_{\bar\alpha\alpha}$

Důsledek. $\alpha=(e_1,\dots,e_n)$ báze U, $\varphi: U\to U$ operátor $\qquad \alpha=\bar\alpha$

$\Rightarrow \Lambda^n\varphi: \Lambda^n U\to\Lambda^n U$ je násobení číslem $\det\varphi=\det(\varphi)_{\alpha\alpha}$ nezávisle na α.

$e_1\wedge\cdots\wedge e_n \mapsto c\cdot e_1\wedge\cdots\wedge e_n$, $c.$ $\qquad \det(P^{-1}AP)=\det A$

$$\Rightarrow \det(\psi\circ\varphi)=\det\psi\cdot\det\varphi$$

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n U \arrow[r, "\Lambda^n\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\Lambda^n(\psi\circ\varphi)"'] & \Lambda^n U \arrow[r, "\Lambda^n\psi"] & \Lambda^n U \end{tikzcd}$$

Objemy, orientace

$\Lambda^n U \quad \overset{\text{vol}}{\cong} \quad \Bbbk$; $0 \;\; \text{"}1\text{"}$; $0 \;\; 1$

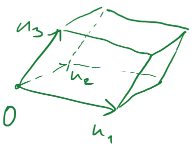
$t^{alt}(u_1,\dots,u_n) = u_1\wedge\dots\wedge u_n$

Definice. Objemová forma na vektorovém prostoru U dimenze $\underline{n}$ ← univerzální je nenulová antisymetrická n-lineární forma

$t^{alt} \doteq \text{Vol}$ ← volba měřítka

$$\text{Lin}_n(U,\dots,U;\Bbbk)_{alt} \cong \text{Hom}(\Lambda^n U, \Bbbk)$$
$$\text{Vol} \in \qquad\qquad \text{vol} \in$$
$$\text{Vol} \longleftrightarrow \text{vol}$$

$\Pi^n U \xrightarrow{\text{Vol}} \Bbbk$, $\; t^{alt}\downarrow$, $\; \Lambda^n U \xrightarrow[\text{vol}]{\cong} \Bbbk$



$\Rightarrow \text{Vol}(u_1,\dots,u_n) = \text{vol}(u_1\wedge\dots\wedge u_n)$ ... orientovaný objem rovnoběžnostěnu určeného $u_1,\dots,u_n$

$\Rightarrow$ vol jednoznačně určeno lib. hodnotou

$$0 \neq \text{vol}(e_1\wedge\dots\wedge e_n) = \text{Vol}(e_1,\dots,e_n) \quad \dots \quad (e_1,\dots,e_n) \text{ báze } U$$

Díky předchozímu: $(u_1,\dots,u_n) = (e_1,\dots,e_n)\cdot P$ ← matice souřadnic vektorů $u_1,\dots,u_n$ vzhledem k bázi $e_1,\dots,e_n$

$u_i = (e_1,\dots,e_n)\, p_i$
$\quad = e_1 p_i^1 + \dots + e_n p_i^n$

$P = ((u_1)_\alpha \; \dots \; (u_n)_\alpha)$

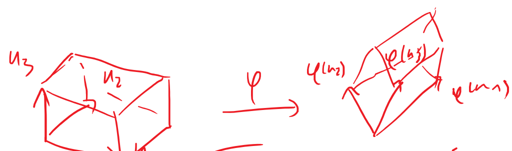
$$\text{Vol}(u_1,\dots,u_n) = \text{vol}(u_1\wedge\dots\wedge u_n) = \text{vol}(\det P\cdot e_1\wedge\dots\wedge e_n)$$
$$= \det P\cdot \text{vol}(e_1\wedge\dots\wedge e_n)$$
$$= \det P\cdot \text{Vol}(e_1,\dots,e_n)$$

Příklad. Standardní objemovou formou na $\Bbbk^n$ rozumíme tu, pro kterou $\text{Vol}(\underbrace{e_1,\dots,e_n}_{\text{std. báze } \Bbbk^n}) = 1$. Pak

$\det E = 1$

$$\text{Vol}(u_1,\dots,u_n) = \det(u_1 \dots u_n).$$

Nechť $\varphi: U \to U$ je operátor. Pak



$$\text{Vol}(\varphi(u_1),\dots,\varphi(u_n)) = \det\varphi\cdot\text{Vol}(u_1,\dots,u_n)$$

tj. zobrazení φ zvětšuje orientovaný objem $\det\varphi$-krát.

$\boxed{\Bbbk = \mathbb{R}\;!}$

orientovaný objem = orientovaný + objem

$$\text{Vol}(u_1,\dots,u_n) = \text{sign}\,\text{Vol}(e_1,\dots,e_n)\cdot|\text{Vol}(e_1,\dots,e_n)|$$

obj. f. $\quad$ obj. f.
$\varphi: U \longrightarrow V$

$$\det\varphi = \frac{\text{Vol}(\varphi(u_1),\dots,\varphi(u_n))}{\text{Vol}(u_1,\dots,u_n)}$$

závisí na bázi — chceme báze stejných objemů

Definice. Orientace reálného vektorového prostoru U je zobrazení

$$\text{sign}: \{\text{báze } U\} \longrightarrow \{\pm 1\}$$

splňující $\quad \bar\alpha = \alpha\cdot P \;\Rightarrow\; \text{sign}\,\bar\alpha = \text{sign}\det P\cdot\text{sign}\,\alpha$

$\bar e_1\wedge\dots\wedge\bar e_n = c\cdot e_1\wedge\dots\wedge e_n$ pro $c>0$ resp. $c<0$

Podrobněji ... $\text{sign}\,\bar\alpha = \text{sign}\,\alpha$ pro souhlasně orientované báze

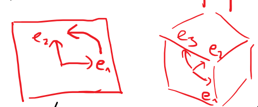
$\text{sign}\,\bar\alpha = -\text{sign}\,\alpha$ pro opačně orientované báze

$\text{sign}\,\alpha = +1$ // kladné báze

Pozn. souhlasná orientace $\longrightarrow$ rozklad na dvě třídy, sign = označení $\langle$ kladné / záporné báze

Příklad • $\mathbb{R}^n$ má standardní orientaci danou tím, že standardní p.p.r. báze je kladná: $\operatorname{sign}(e_1,\dots,e_n) = +1$.

obecně: $\operatorname{sign}(u_1,\dots,u_n) = \operatorname{sign}\det(u_1\dots u_n)$



• Komplexní vektorový prostor U chápaný jako reálný vektorový prostor $U^{\mathbb{R}}$ např. $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ má standardní orientaci danou:

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

$\underset{(z)}{\overset{(1)}{(e_1,\dots,e_n)}}$ báze $\overset{\mathbb{C}}{\underset{\mathbb{C}}{U}}$ $\Rightarrow$ $\underset{(z,\, i\cdot z)}{\overset{(1,\, i)}{(e_1,\dots,e_n,\, i\cdot e_1,\dots,i\cdot e_n)}}$ kladná báze $U^{\mathbb{R}}$

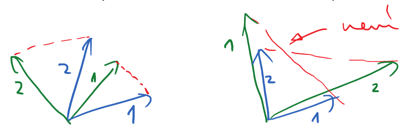
$P = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $\det P = a^2+b^2 > 0$

• vektorový prostor dimenze 0, tj. $0 = \{0\}$ má jedinou bázi a ta může být pořád kladná nebo záporná. $\operatorname{sign}(\,) = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$ dvě orientace

Věta. Nechť α, β jsou dvě báze $\mathbb{R}^n$ chápané jako matice $\alpha, \beta \in GL(n)$. Potom α, β jsou souhlasně orientované, právě když je lze spojit cestou v $GL(n)$.

Důkaz. Jestliže $\gamma: [0,1] \longrightarrow GL(n)$ je spojité zobrazení (cesta) s $\gamma(0) = \alpha$, $\gamma(1) = \beta$, pak

$\det \gamma(t): [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\}$ je spojité $\Rightarrow$ stále kladné / stále záporné



nemí báze

Naopak nechť $\operatorname{sign}\alpha = \operatorname{sign}\beta$. Pak lze α převést na β pomocí operací

• přičtení násobku sloupce ... $P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ k & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ... $P(t) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ tk & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$\beta = \alpha \cdot P$ ... $\gamma(t) = \alpha \cdot P(t)$

• vynásobení sloupce kladným číslem e^k ... $P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^k & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ... $P(t) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{kt} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$\beta = \alpha \cdot P$ ... $\gamma(t) = \alpha \cdot P(t)$

Místo prohazování sloupců: $\overset{I \to I + II}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \overset{II \to II - I}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \overset{I \to I + II}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ = prohození + vynásobení jednoho z nich (-1)

Násobení dvou sloupců (-1): $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$i \cdot i = -1$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ II, $+1\times$, $-1\times$, $+1\times$

Orientovaný eukleidovský prostor

Nechť U je or. eukl. pr., $\alpha = (e_1,\dots,e_n)$, $\bar\alpha = (\bar e_1,\dots,\bar e_n)$ dvě kladné ortonormální báze. Pak $\bar\alpha = \alpha \cdot P$ a P má:

• $\det P > 0$ protože $\bar\alpha, \alpha$ mají souhlasnou orientaci

• $|\det P| = 1$ protože P je ortogonální $\quad (P^* P = E \Rightarrow |\det P|^2 = 1)$

$\Rightarrow \det P = 1$.

Definujme kanonickou objemovou formu požadavkem

$$\operatorname{Vol}(e_1,\dots,e_n) = 1 \quad \text{pro libovolnou kladnou ortonormální bázi}$$

$$(\Rightarrow \operatorname{Vol}(\bar e_1,\dots,\bar e_n) = \det P \cdot \operatorname{Vol}(e_1,\dots,e_n) = \operatorname{Vol}(e_1,\dots,e_n))$$

Nechť $(u_1,\dots,u_n) = (e_1,\dots,e_n)\cdot P \quad \Rightarrow \quad P = ((u_1)_\alpha \cdots (u_n)_\alpha) = (f^i(u_j))$

$= \langle e_i, u_j \rangle$

Pak $\operatorname{Vol}(u_1,\dots,u_n) = \det P \cdot \operatorname{Vol}(e_1,\dots,e_n) = \det P$

$\operatorname{Vol}(u_1,\dots,u_n)^2 = \det P^T \cdot \det P = \det(P^T \cdot P)$ itd souřadnice u_j

$$\mathrm{Vol}(u_1, \dots, u_n)^2 = \det P^T \cdot \det P = \det(P^T \cdot P)$$ i-tá souřadnice u_j

$$= \det\left(\begin{pmatrix} (u_1)_\alpha^T \\ \vdots \\ (u_n)_\alpha^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (u_1)_\alpha & \dots & (u_n)_\alpha \end{pmatrix}\right)$$

$$= \underbrace{\det \underbrace{\begin{pmatrix} \langle u_1, u_1\rangle & \dots & \langle u_1, u_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle u_n, u_1\rangle & \dots & \langle u_n, u_n\rangle \end{pmatrix}}_{\text{Gramova matice}}}_{\det(\langle e_i, u_j\rangle) = \text{Gramův determinant}} = \det(\langle u_i, u_j\rangle)$$

Věta.
- $\mathrm{Vol}(u_1, \dots, u_n) = \det(f^i(u_j))$ v lib. kl. ortonorm. bázi ... znaménko
- $\mathrm{Vol}(u_1, \dots, u_n)^2 = \det(\langle u_i, u_j\rangle)$ nezávislé na orientaci

$\hookrightarrow$ $|\mathrm{Vol}(u_1, \dots, u_n)| = \det(\langle u_i, u_j\rangle)^{1/2}$ ... „neorientovaný objem"

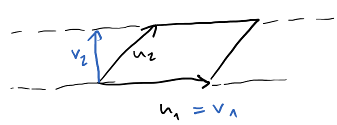
Pozn. Gramův – Schmidtův ortogonalizační proces

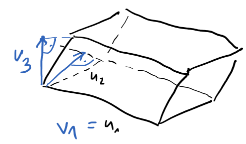
$(u_1, \dots, u_n) \rightsquigarrow \underbrace{(v_1, \dots, v_n)}_{\text{ortogonální}}$ $\qquad v_i = u_i + \text{lin. komb. } u_1, \dots, u_{i-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det P = 1$$

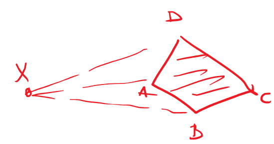
$$\Rightarrow \mathrm{Vol}(u_1, \dots, u_n)^2 = \mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_n)^2$$
$$= \det\begin{pmatrix} |v_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |v_n|^2 \end{pmatrix} = |v_1|^2 \cdots |v_n|^2$$

$\Rightarrow |\mathrm{Vol}(u_1, \dots, u_n)| = |v_1| \cdots |v_n|$ = objem rovnoběžnostěnu $\quad$ je to fakt orient. objem?

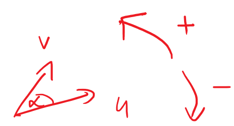




Geometrie v orientované eukleidovské rovině.



$$\mathrm{Vol}(u,v)^2 = \det\begin{pmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle \\ \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle \end{pmatrix} = |u|^2 |v|^2 - (|u| \cdot |v| \cdot \cos\alpha)^2$$
$$= |u|^2 \cdot |v|^2 \cdot \sin^2\alpha$$



$$|\mathrm{Vol}(u,v)| = |u| \cdot |v| \cdot \sin\alpha$$

Zavedeme orientovaný úhel $\measuredangle(u,v) \in [-\pi, \pi]$: $\qquad$ lépe $\measuredangle(u,v) \in \mathbb{R}/2\pi\cdot\mathbb{Z}$

$$\cos\alpha = \frac{\langle u,v\rangle}{|u| \cdot |v|} \qquad \sin\alpha = \frac{\mathrm{Vol}(u,v)}{|u| \cdot |v|}$$

$|v| = |u|$, $\measuredangle(u,v) = +90°$

$\measuredangle$ $\Leftrightarrow$ násobení i = rotace o $+90°$

$\Rightarrow$ vektorový prostor nad $\mathbb{C}$: $\quad (a + i\cdot b)\, u = a u + b v$

Naopak násobení komplexními čísly dá orientaci + sk. součin až na násobek

$$\measuredangle(u,v) = \arg\left(\frac{v}{u}\right) \qquad \begin{matrix} v = z \cdot u \\ \arg z = \measuredangle(u,v) \end{matrix} \qquad \frac{|v|}{|u|} = \left|\frac{v}{u}\right| = \text{relativní velikost}$$

Geometrie v orientovaném eukleidovském prostoru (dimenze 3)

$\mathrm{Vol}(u,v,-): U \to \mathbb{R}$ lineární forma

připomeňme $R: U \xrightarrow{\cong} U^*$, $x \mapsto \langle x,-\rangle$

$\Rightarrow$ ex. jediný vektor $u\times v$ t.ž.

$$\mathrm{Vol}(u,v,w) = \langle u\times v, w\rangle$$

definice $u\times v$ ... ex. jediný, protože R iso

(tj. vzor $u\times v \in U \xrightarrow[\cong]{R} U^* \ni \mathrm{Vol}(u,v,-)$)

Zjevně je $u\times v$ lineární v každé složce a antisymetrické

$-\times- : U\times U \longrightarrow U$ (vlastně $\Lambda^2 U \to U$)

Jak vypadají hodnoty na dvojicích bázových vektorů?

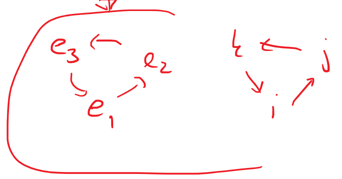
(e_1,e_2,e_3) kladná ON báze

$\Downarrow$

(e_2,e_3,e_1) —||—

(e_3,e_1,e_2)

$$\left.\begin{array}{lcl} \mathrm{Vol}(e_1,e_2,e_1)=0 & \Leftrightarrow & \langle e_1\times e_2, e_1\rangle = 0 \\ \mathrm{Vol}(e_1,e_2,e_2)=0 & \Leftrightarrow & \langle e_1\times e_2, e_2\rangle = 0 \\ \mathrm{Vol}(e_1,e_2,e_3)=1 & \Leftrightarrow & \langle e_1\times e_2, e_3\rangle = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} e_1\times e_2 = e_3 \;\Rightarrow & e_2\times e_1 = -e_3 \\ e_2\times e_3 = e_1 & e_3\times e_2 = -e_1 \\ e_3\times e_1 = e_2 & e_1\times e_3 = -e_2 \end{array}$$



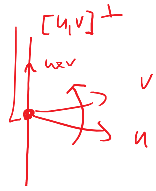
Takto lze vektorový součin počítat v souřadnicích:

$$\begin{aligned} u\times v &= \langle u\times v, e_1\rangle e_1 + \langle u\times v, e_2\rangle e_2 + \langle u\times v, e_3\rangle e_3 \\ &= \mathrm{Vol}(u,v,e_1)\, e_1 + \mathrm{Vol}(u,v,e_2)\, e_2 + \mathrm{Vol}(u,v,e_3)\, e_3 \\ &= \det\begin{pmatrix} u^1 & v^1 & 1 \\ u^2 & v^2 & 0 \\ u^3 & v^3 & 0\end{pmatrix} e_1 + \det\begin{pmatrix} u^1 & v^1 & 0 \\ u^2 & v^2 & 1 \\ u^3 & v^3 & 0\end{pmatrix} e_2 + \det\begin{pmatrix} u^1 & v^1 & 0 \\ u^2 & v^2 & 0 \\ u^3 & v^3 & 1\end{pmatrix} e_3 \\ &\text{"="} \det\begin{pmatrix} u^1 & v^1 & e_1 \\ u^2 & v^2 & e_2 \\ u^3 & v^3 & e_3\end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\longleftarrow$ klasický inženýrský vzorec (až na transponování a možné pořadí)

Geometrická verze:

Věta. Vektorový součin má následující vlastnosti:



- $u\times v$ je kolmý na u,v
- $u\times v \neq 0$, právě když u,v jsou lineárně nezávislé a pak
- $(u,v,u\times v)$ je kladná báze
- $|u\times v| = |u|\cdot|v|\cdot \sin\measuredangle(u,v)$ $\longleftarrow$ neorientovaný úhel $\in [0,\pi]$

Kvaterniony

Definice. Algebra kvaternionů $\mathbb{H}$ je $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\{1, i, j, k\}$ společně s násobením daném tabulkou

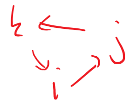
$q \cdot r$:

$q \backslash r$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	j
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

$\longrightarrow$ zadává jediné bilineární zobrazení $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$

je potřeba ověřit, že je asociativní ...

$$\boxed{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1}$$



Kvaternion $q \in \mathbb{H}$ můžeme psát v algebraickém tvaru

$$q = a + bi + cj + dk$$

nebo ve vektorovém tvaru $\quad bi + cj + dk = (b, c, d) = u \in \mathbb{R}^3$

$$q = a + u$$

Geometrická interpretace násobení kvaternionů

$$(a+u)(b+v) = \underbrace{ab}_{\substack{\text{násobení}\\\text{skalárů}}} + \underbrace{av + bu}_{\substack{\text{násobení}\\\text{skaláry}}} + \underbrace{uv}_{}$$

$$uv = \underbrace{-\langle u, v\rangle}_{\substack{\text{symetrická}\\\text{část}}} + \underbrace{u \times v}_{\substack{\text{antisymetrická}\\\text{část}}}$$

$$u \cdot v = -\langle u, v\rangle + u \times v \implies \frac{1}{2}(u \cdot v + v \cdot u) = -\langle u, v\rangle = \mathrm{Re}\,(u \cdot v)$$

$$\frac{1}{2}(u \cdot v - v \cdot u) = u \times v = \mathrm{Im}\,(u \cdot v)$$

$$u \cdot v \cdot w = -\langle u, v\rangle w \underbrace{- \langle u \times v, w\rangle}_{-\mathrm{Vol}(u, v, w) \in \mathbb{R}} + (u \times v) \times w \implies -\mathrm{Vol}\,(u, v, w) = \mathrm{Re}\,(u \cdot v \cdot w)$$

Inverze: (jako pro komplexní čísla)

$$q = a + u \implies q^* = a - u$$

$$q \cdot q^* = (a+u)(a-u) = a^2 - au + au \underbrace{- u \cdot u}_{\langle u, u\rangle - \underbrace{u \times u}_{0}}$$

$$= a^2 + |u|^2 = |q|^2 \in \mathbb{R}$$

$$\implies q^{-1} = \frac{1}{|q|^2} \cdot q^*$$

Goniometrický tvar jednotkového kvaternionu q, tj. t.ž. $|q| = 1 \implies q^{-1} = q^*$

$$a^2 + |u|^2 = |q|^2 = 1$$

$$\implies a = \cos\varphi, \quad |u| = \sin\varphi \implies u = v \cdot \sin\varphi$$

normovaný vektor, např. i, j, k

$$q = \cos\varphi + v \cdot \sin\varphi = e^{v \cdot \varphi}$$

naopak $\quad (e^{v\cdot\varphi})^{-1} = e^{-v \cdot \varphi}$

2 nejednoznačnost: $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $e^{v\cdot\varphi} = e^{(-v)\cdot(-\varphi)}$

$$\cos\varphi + v\cdot\sin\varphi = \cos(-\varphi) + (-v)\cdot\sin(-\varphi)$$

$\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ $\Rightarrow$ v zcela nejednoznačné

Naším cílem bude reprezentovat otočení pomocí násobení kvaternionů

$$\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \qquad \rightsquigarrow \qquad \operatorname{Im}\mathbb{H} \longrightarrow \operatorname{Im}\mathbb{H}$$

$$u \longmapsto e^{v\cdot\varphi}\cdot u\cdot e^{-v\cdot\varphi} \qquad\qquad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Lemma.

- $u\cdot v = v\cdot u \iff u \parallel v$
- $u\cdot v = -v\cdot u \iff u \perp v$

Nechť nyní $u \parallel v$:

$$u \longmapsto e^{v\cdot\varphi}\cdot u\cdot e^{-v\cdot\varphi} = (\cos\varphi + v\cdot\sin\varphi)\cdot u\cdot(\cos\varphi - v\cdot\sin\varphi)$$

$$= \underbrace{e^{v\cdot\varphi}\cdot e^{-v\cdot\varphi}}_{1}\cdot u = u$$

$\Rightarrow$ zobrazení je id na přímce generované v.

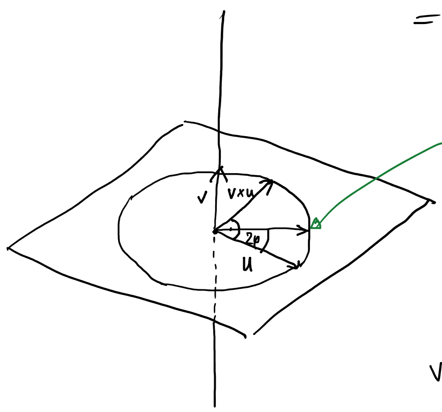
Nechť nyní $u \perp v$:

$$u \longmapsto e^{v\cdot\varphi}\cdot u\cdot e^{-v\cdot\varphi} = (\cos\varphi + v\cdot\sin\varphi)\cdot u\cdot(\cos\varphi - v\cdot\sin\varphi)$$

$$= e^{v\cdot\varphi}\cdot e^{v\cdot\varphi}\cdot u = e^{v\cdot(2\varphi)}\cdot u$$

$$= (\cos(2\varphi) + v\cdot\sin(2\varphi))\cdot u$$

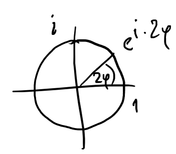
$$= u\cdot\cos(2\varphi) + v\times u\cdot\sin(2\varphi)$$



$$\longleftarrow \quad \mathbb{C}$$

$$u \longleftarrow 1$$

$$v\times u \longleftarrow i$$



konformní zobrazení
$\Rightarrow$ zachovává poměry velikostí a úhly
(obrazy kolmé a stejně veliké)

$\Rightarrow$ zobrazení je rotace o úhel 2φ v rovině $v^\perp$
+ směr „podle pravidla pravé ruky" = ve směru od u k $v \times u$.

Věta. Zobrazení $u \mapsto e^{v\cdot\varphi} \cdot u \cdot e^{-v\cdot\varphi}$ dané konjugací jednotkovým kvaternionem $e^{v\cdot\varphi}$ je na $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ rotace okolo vektoru v o úhel 2φ.

Poznámka. Prostor rotací $SO(3)$

$$S^3 \longrightarrow SO(3)$$
$$q \longmapsto (u \mapsto q u q^{-1})$$

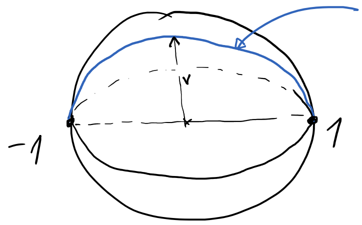
je surjektivní homomorfismus grup. Jaké je jeho jádro?

$$e^{v\cdot\varphi} \in \ker, \quad |v| = 1, \quad \varphi \in [0,\pi] \iff \varphi = 0 \text{ nebo } \varphi = \pi$$

$\Rightarrow \ker = \{\pm 1\}$

$$S^3/\{\pm 1\} \xrightarrow{\cong} SO(3)$$

„dvojnásobné nakrytí" $\Rightarrow SO(3) \cong \mathcal{P}_3 \;(= \mathbb{R}P^3)$ — reálný projektivní prostor dimenze 3



$\cos(\pi\cdot t) + v \cdot \sin(\pi \cdot t) \longmapsto$ rotace okolo v o úhel $2\pi\cdot t$

$t \in [0,1]$