Polynomiální matice, SNF, kanonické tvary operátorů

$\mathbb{Z}[\lambda] \supseteq (2,\lambda)$ není hlavní

Budeme uvažovat matice s prvky v okruhu $\mathbb{k}[\lambda]$, kde $\mathbb{k}$ je těleso ← PID;

$\mathbb{k}[x,y] \supseteq (x,y)$ není hlavní

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Mat}_{n\times m}\,\mathbb{k}[\lambda]$ matice $n\times m$ s prvky z $\mathbb{k}[\lambda]$

$\rightsquigarrow$ Lemma. $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}\,\mathbb{k}[\lambda]$ je invertibilní $\Leftrightarrow$ $n=m$ & $\det A \in \mathbb{k}^\times$.

konst. nenulové pol.

Věta (o SNF). $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}\,\mathbb{k}[\lambda]$ $\Rightarrow$ existují invertibilní matice P, Q t.ž.

- P, Q jsou součiny elementárních matic nad $\mathbb{k}[\lambda]$
- $PAQ = \left(\begin{array}{ccc|c} q_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & q_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) = S$ } matice ve Smithově normálním tvaru

  přičemž $q_1 \mid \cdots \mid q_r$
- polynomy $q_1 | \cdots | q_r$ jsou jednoznačné až na násobení nenulovým skalárem (pro nás normované $\Rightarrow$ jednoznačné); nazývají se invariantní faktory.
- konkrétněji:

  $d_i = \gcd\{\text{minory } i\times i \text{ matice } A\}$; $d_0 = 1$ ← jediný minor $\det() = 1$?

  $q_i = d_i / d_{i-1}$ ← $d_1 = \gcd\{\text{prvky matice } A\}$

$A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}\,\mathbb{k}$ $\rightsquigarrow$ lineární zobrazení $\mathbb{k}^m \to \mathbb{k}^n$

$A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}\,\mathbb{Z}$ $\rightsquigarrow$ homomorfismus grup $\mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$

$A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}\,\mathbb{k}[\lambda]$ $\rightsquigarrow$ homomorfismus čeho? $\mathbb{k}[\lambda]^m \to \mathbb{k}[\lambda]^n$

} sčítání a násobení skaláry

← „jediný" rozdíl je v tom, že $\mathbb{k}[\lambda]$ není těleso

Definice. $\mathbb{k}[\lambda]$-modul je abelovská grupa M společně s operací násobení skaláry

$$\mathbb{k}[\lambda] \times M \longrightarrow M$$
$$(p, x) \longmapsto p\cdot x$$

splňující
$$p\cdot(q\cdot x) = (p\cdot q)\cdot x, \quad 1\cdot x = x,$$
$$(p+q)\cdot x = p\cdot x + q\cdot x, \quad p\cdot(x+y) = p\cdot x + p\cdot y$$

Příklad. $M = \mathbb{k}[\lambda]^n$ s operacemi „po složkách"

$$p\cdot(q_1,\dots,q_n) = (p\cdot q_1,\dots,p\cdot q_n)$$

násobení polynomy $\Longleftrightarrow$ { násobení skaláry z $\mathbb{k}$ / násobení monomem λ … zobrazení $m_\lambda : M \to M$

násobení polynomy $\iff$ $\begin{cases} \text{násobení skaláry z } \Bbbk \\ \text{násobení monomem } \lambda \dots \text{ zobrazení } m_\lambda : M \to M,\ x \mapsto \lambda\cdot x \end{cases}$

$\Rightarrow$ snadné

$\Leftarrow$ $p\cdot x = (p_0 + p_1\lambda + \dots + p_k\lambda^k)\cdot x = p_0 x + p_1(\lambda\cdot x) + \dots + p_k(\lambda\cdot(\dots\lambda\cdot(\lambda\cdot x)\dots))$

$= p_0 x + p_1\, m_\lambda(x) + \dots + p_k\, m_\lambda^k(x)$

$= (p_0\, \mathrm{id} + p_1 m_\lambda + \dots + p_k m_\lambda^k)(x)$

Věta. Struktura $\Bbbk[\lambda]$-modulu na M $\iff$ $\begin{cases} \text{struktura v.p. } / \Bbbk \text{ na } M \\ \text{lin. operátor } T : M \to M \end{cases}$

odpovídající $\Bbbk[\lambda]$-modul $=: (V, T)$

$T = m_\lambda$ je lineární: $m_\lambda(ax+by) = \lambda\cdot(ax+by) = a(\lambda x) + b(\lambda y) = a\, m_\lambda(x) + b\, m_\lambda(y)$

$\lambda\cdot ax = (\lambda a)\cdot x = (a\lambda)\cdot x = a\cdot\lambda x$

Podle předchozího můžeme psát $p\cdot x = p(T)x$

kde $p(T) = p_0\cdot \mathrm{Id} + p_1\cdot T + \dots + p_k\cdot T^k$

Příklad. $\Bbbk[\lambda]$ jakožto $\Bbbk[\lambda]$-modul snadný; jakožto v.p. $/ \Bbbk$ s operátorem

$$\left.\begin{aligned} \Bbbk[\lambda] &= \Bbbk^{\oplus \mathbb{N}_0} = \{(a_0, a_1, \dots) \mid a_k = 0 \ \forall k \gg 0\} \\ T(a_0, a_1, \dots) &= (0, a_0, a_1, \dots) \end{aligned}\right\} \text{ komplikovanější}$$

Definice. Zobrazení $\varphi : M \to N$ se nazývá homomorfismus $\Bbbk[\lambda]$-modulů, jestliže $\varphi(px + qy) = p\,\varphi(x) + q\,\varphi(y)$.

$M = (V, T)$, $N = (U, S)$

Věta. $\varphi : V \to U$ je homomorfismus $\Bbbk[\lambda]$-modulů, právě když je lineární a komutuje diagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "m_\lambda = T"'] & U \arrow[d, "S = m_\lambda"] \\ V \arrow[r, "\varphi"] & U \end{tikzcd}$$

$x \mapsto \varphi(x)$, $\lambda\cdot x \mapsto \varphi(\lambda\cdot x) = \lambda\cdot\varphi(x)$

$\leftarrow$ pro isomorfismus φ: $S = \varphi T \varphi^{-1}$ … podobnost operátorů

$S = P\cdot T\cdot P^{-1}$

Důkaz. linearita = zachovává násobení konst. polynomy
diagram = zachovává násobení polynomem λ ∎

Věta. Homomorfismus $\Bbbk[\lambda]$-modulů $\varphi : \Bbbk[\lambda]^n \to M$ je jednoznačně určen (libovolnými) obrazy $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \in M$. Zejména homomorfismy $\Bbbk[\lambda]$-modulů $\Bbbk[\lambda]^m \to \Bbbk[\lambda]^n$ jsou v bijekci s maticemi z $\mathrm{Mat}_{n\times m}\Bbbk[\lambda]$.

$(1+\lambda)e_1 + (1-\lambda^2)e_2 + (\lambda+\lambda^2)e_3$

Důkaz. $\varphi\begin{pmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^n \end{pmatrix} = \varphi(p^1\cdot e_1 + \dots + p^n\cdot e_n) = p^1\cdot\varphi(e_1) + \dots + p^n\cdot\varphi(e_n)$

$= (\varphi(e_1) \ \cdots \ \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^n \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1-\lambda^2 \\ \lambda+\lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda^2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ∎

Alternativně můžeme psát $\begin{pmatrix} p \\ \vdots \\ p^n \end{pmatrix} = v_0 + \lambda v_1 + \dots + \lambda^k v_k \implies$

$\implies \varphi\begin{pmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^k \end{pmatrix} = \varphi(v_0) + \lambda\varphi(v_1) + \dots + \lambda^k \varphi(v_k)$ ... pomocí lin. zobr. $\varphi: \mathbb{k}^n \to M$.

$\varphi(Te_i - \lambda\cdot e_i) = Te_i - \lambda\cdot e_i = Te_i - Te_i$

Definice. $N \subseteq M$ $\mathbb{k}[\lambda]$-podmodul $\implies$ $M/N = \{x + N \mid x \in M\}$ je opět $\mathbb{k}[\lambda]$-modul s násobením skaláry

$$p\cdot(x+N) \overset{def}{=} px + N.$$

ab. grupy: coker $A = \mathbb{Z}^n / \operatorname{im} A$ kvocient!

Kanonická prezentace operátoru na $\mathbb{k}^n$

Mějme operátor T na $\mathbb{k}^n$, tj. $T \in \mathrm{Mat}_{n\times n}\,\mathbb{k}$.

$$\mathbb{k}[\lambda]^n \xrightarrow{T-\lambda E} \mathbb{k}[\lambda]^n \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} (\mathbb{k}^n, T)$$

e_i $\qquad e_i \longmapsto e_i \implies \varphi(v_0 + \lambda v_1 + \dots + \lambda^k v_k) = v_0 + Tv_1 + \dots + T^k v_k$

Věta. $\operatorname{im}(T-\lambda E) = \ker\varphi \implies (\mathbb{k}^n, T) \cong \operatorname{coker}(T-\lambda E) = \mathbb{k}[\lambda]^n / \operatorname{im}(T-\lambda E)$

$\varphi((T-\lambda E)\,x) = 0$

Důkaz. $\subseteq$ znamená $\varphi\circ(T-\lambda E) = 0 \iff \varphi((T-\lambda E)\,e_i) = 0$

ale $\varphi((T-\lambda E)\,e_i) = \varphi(Te_i - \lambda e_i) = Te_i - Te_i = 0$ ✓

$\supseteq$ nechť $x = v_0 + \lambda v_1 + \dots + \lambda^k v_k \in \ker\varphi$, ukážeme, že $v \equiv 0$ (mod $\operatorname{im}(T-\lambda E)$)

přitom $Tv \equiv \lambda v$ (mod $\operatorname{im}(T-\lambda E)$)

$$\implies x \equiv v_0 + Tv_1 + \dots + T^k v_k = \varphi(x) = 0 \ ✓ \qquad \square$$

$\implies$ opět $\mathrm{SNF}(T-\lambda E)$ má zásadní roli při klasifikaci $\mathbb{k}[\lambda]$-modulů $(\mathbb{k}^n, T)$ až na isomorfismus

$=$ operátorů T na $\mathbb{k}^n$ až na podobnost.

Věta. Operátory T, T' jsou podobné, právě když $T-\lambda E$, $T'-\lambda E$ mají stejnou SNF. $\leftarrow$ lze algoritmicky testovat, ale JKT těžko

Důkaz. $\mathrm{SNF}(T-\lambda E) = \mathrm{SNF}(T'-\lambda E) \iff P(\lambda)\,(T-\lambda E)\,Q(\lambda) = T' - \lambda E$

„$\Rightarrow$": $PTP^{-1} = T' \implies P\,(T-\lambda E)\,P^{-1} = T' - \lambda E$

„$\Leftarrow$":

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{k}[\lambda]^n \arrow[r, "T-\lambda E"] & \mathbb{k}[\lambda]^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "P(\lambda)", "\cong"'] & (\mathbb{k}^n, T) \arrow[d, "P", "\cong"'] & \varphi(x) \arrow[d] \\
\mathbb{k}[\lambda]^n \arrow[r, "T'-\lambda E"'] \arrow[u, "Q(\lambda)", "\cong"'] & \mathbb{k}[\lambda]^n \arrow[r, "\varphi"'] & (\mathbb{k}^n, T') & \varphi(P(\lambda)\cdot x)
\end{tikzcd}$$

isomorfismus P indukovaný $P(\lambda)$

$\cong$ podobnost $\quad PTP^{-1} = T' \qquad \square$

Poznámka.

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & v \\
P(\lambda)\cdot v &
\end{tikzcd}$$

$v + \lambda\cdot 0 + \dots$

$P(\lambda) = P_0 + \lambda P_1 + \dots + \lambda^k P_k$

$= P_0 + P_1\lambda + \dots + P_k\lambda^k$

P ... matice podobnosti

$\Vert$

$$P_0v+\lambda P_1v+\dots+\overset{\shortparallel}{\lambda^k P_k v} \longmapsto P_0v+T'P_1v+\dots+(T')^kP_kv = \overbrace{p^{left}(T')v}$$

Racionální kanonický tvar

$$\begin{array}{ccccc}
\Bbbk[\lambda]^n & \xrightarrow{T-\lambda E} & \Bbbk[\lambda]^n & \longrightarrow & (\Bbbk^n, T) \\
Q(\lambda)\uparrow\cong & & \cong\downarrow P(\lambda) & & P\downarrow\cong \\
\Bbbk[\lambda]^n & \xrightarrow[S]{} & \Bbbk[\lambda]^n & \longrightarrow & \Bbbk[\lambda]/(q_1)\times\dots\times\Bbbk[\lambda]/(q_r)
\end{array}$$

$(q) =$ násobky q = ideál gen. q

$\mathbb{R}[\lambda]/(\lambda^2+1) = \mathbb{C}$

báze $[1], [\lambda]$, 1, i

$$\begin{pmatrix} q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & q_n\end{pmatrix} = S = \left(\begin{array}{c|c} q_1 \ddots q_r & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow r=n \quad (\text{jinak by mělo kojádro } \dim = \infty)$$

ale většina $q_i = 1$!

př. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & (\lambda-1)^4\end{pmatrix}$

$q = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k$

$\Rightarrow \Bbbk[\lambda]/(q)$ má bázi $\alpha = ([1], [\lambda], \dots, [\lambda^{k-1}])$

$[\lambda^k] = [-a_0 - a_1\lambda - \dots - a_{k-1}\lambda^{k-1}]$

a operátor m_λ má vzhledem k α matici

$$C(q) = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{k-1}\end{pmatrix}$$

$\lambda\cdot[1] = [\lambda], \dots, \lambda\cdot[\lambda^{k-2}] = [\lambda^{k-1}]$

$\lambda\cdot[\lambda^{k-1}] = [\lambda^k] = [-a_0 - a_1\lambda - \dots - a_{k-1}\lambda^{k-1}]$

$$\Rightarrow (\Bbbk^n, T) \cong \Bbbk[\lambda]/(q_1)\times\dots\times\Bbbk[\lambda]/(q_n) \cong \left(\Bbbk^n, \begin{pmatrix} C(q_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(q_n)\end{pmatrix}\right), \quad q_1|\dots|q_n$$

racionální kanonický tvar

součin modulů = blokové matice (většina bloků 0×0 ... $q_i = 1$)

Věta. Každý operátor je podobný jedinému operátoru v racionálním kanonickém tvaru.

není potřeba $\Bbbk$ alg. uz., $\Bbbk = \mathbb{Q}$

Důsledek (Cayleyho–Hamiltonova věta).

Nechť $\chi(\lambda) = \det(T-\lambda E)$ značí charakteristický polynom operátoru T.

Potom platí $\chi(T) = 0$.

T je „kořenem" char. poly T

$E, T, T^2, \dots$ lin. záv. v $\mathrm{Mat}_{n\times n}\Bbbk$

Důkaz. $(\Bbbk^n, T) \cong \Bbbk[\lambda]/(q_1)\times\dots\times\Bbbk[\lambda]/(q_n)$, přičemž napravo platí

$q_1|\dots|q_n$

$\forall x: q_n\cdot x = 0 \rightarrow$ nalevo platí $\forall v: q_n\cdot v = 0$ tj. $q_n(T)\cdot v = 0 \Leftrightarrow q_n(T) = 0$.

Přitom $\chi(\lambda) = \det(T-\lambda E) = \pm\det(S) = \pm q_1(\lambda)\cdots q_n(\lambda)$.

determinant se násobí pouze skaláry (SNF) $\square$

$\det(T-\lambda E) = d_n = \det S$

Poznámka. Zjevně minimální polynom „anihilující" $(\Bbbk^n, T) \cong \Bbbk[\lambda]/(q_1)\times\dots\times\Bbbk[\lambda]/(q_n)$ je právě poslední invariantní faktor q_n. Nazývá se minimální polynom operátoru T.

Jordanův kanonický tvar.

$$\begin{pmatrix} p_1^{r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & p_k^{r_k}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}\end{pmatrix}$$

$q = (\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{r_k}$

$$\begin{pmatrix} (\lambda-\lambda_1)^{r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & (\lambda-\lambda_k)^{r_k}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & q\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{k}[\lambda]/((\lambda-\lambda_1)^{r_1}) \times\cdots\times \mathbb{k}[\lambda]/((\lambda-\lambda_k)^{r_k}) \cong \mathbb{k}[\lambda]/(q)$$

↳ mocniny prvočísel

$$\mathbb{Z}/p_1^{r_1}\times\cdots\times\mathbb{Z}/p_k^{r_k} \cong \mathbb{Z}/p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$$

Jak vypadá $\mathbb{k}[\lambda]/((\lambda-\lambda_0)^r)$ jako v.p. s operátorem ?

Zvolme bázi $\alpha = ([(\lambda-\lambda_0)^{r-1}],\dots,[\lambda-\lambda_0],[1]) \Rightarrow m_\lambda$ má matici

($m_{\lambda-\lambda_0}$ má matici $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}$)

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0\end{pmatrix}$$

$q_1 | \dots | q_n$ se zcela rozkládají!

Věta. Je-li $\mathbb{k}$ alg. uz. nebo pokud se $\chi(\lambda)$ zcela rozkládá, je operátor T podobný jedinému operátoru v JKT (až na pořadí bloků).

Příklad. Najděte JKT operátoru T a matici zprostředkující podobnost.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda)(T-\lambda E)Q(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & (\lambda-1)^2 & \\ & & & (\lambda-1)^2\end{pmatrix}$$

↳ řádkové operace

$$E \longrightarrow P(\lambda)\cdot E = P(\lambda)$$

$$T-\lambda E = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0-\lambda & 1 & -1 & 1 & 1 & & & \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 & & 1 & & \\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0 & & & 1 & \\ -1 & 1 & 0 & 1-\lambda & & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2-\lambda & -1 & 1 & & 1 & & \\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0 & & & 1 & \\ -1 & 1 & 0 & 1-\lambda & & & & 1 \\ -\lambda & 1 & -1 & 1 & 1 & & & \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & \cancel{2-\lambda} & \cancel{-1} & \cancel{1} & & 1 & & \\ 0 & -1+\lambda & 2-\lambda & -1 & & -1 & 1 & \\ 0 & -1+\lambda & 1 & -\lambda & & -1 & & 1 \\ 0 & (1-\lambda)^2 & -1+\lambda & 1-\lambda & 1 & -\lambda & & \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & & 1 & & \\ 0 & -1 & -1+\lambda & 2-\lambda & & -1 & 1 & \\ 0 & -\lambda & -1+\lambda & 1 & & -1 & & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+\lambda & 2-\lambda & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1+\lambda & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & (1-\lambda)^2 & -1+\lambda & 1 & -\lambda & 0 & 0 \end{array}\right) \quad 2(-\lambda)+ \quad (1-\lambda)x$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cancel{-1+\lambda} & \cancel{2-\lambda} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\lambda)^2 & \cancel{(1-\lambda)^2} & 0 & -1+\lambda & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\lambda)^2 & 1 & -1 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right)$$

$$-1+\lambda+(1-\lambda)(2-\lambda)$$
$$= -1+\lambda+2-3\lambda+\lambda^2$$
$$= 1-2\lambda+\lambda^2$$

$$\begin{array}{cc} S & P(\lambda) \end{array}$$
$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)^2 & 0 & 0 & -1+\lambda & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\lambda)^2 & 1 & -1 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right)$$

$$P(\lambda) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P_0} + \lambda\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{P_1}$$

$$(e_1,e_2,e_3,e_4) \longmapsto (e_1,e_2,e_3,e_4)$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}[\lambda]^4 \arrow[r, "T-\lambda E"] & \mathbb{K}[\lambda]^4 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "P(\lambda)"] & (\mathbb{K}^4, T) \arrow[d, "P"', "\cong"] \\ \mathbb{K}[\lambda]^4 \arrow[u, "Q(\lambda)"] \arrow[r, "S"] & \mathbb{K}[\lambda]^4 \arrow[r] & (\mathbb{K}^4, J) \end{tikzcd}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cancel{1} \\ \cancel{-1} \\ -1+\lambda \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ \cancel{1} \\ 0-\lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \longleftarrow \text{sloupečky } P(\lambda)$$

vyjádříme v bázi $\big((\lambda-1)e_3, e_3, (\lambda-1)e_4, e_4\big)$ mod $\underbrace{\big(e_1, e_2, (1-\lambda)^2 e_3, (1-\lambda)^2 e_4\big)}_{\mathrm{im}\, S}$

$\mathbb{K}[\lambda]^4 / \mathrm{im}\, S$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

(bohužel ve špatném směru – lze řešit přes inverzi nebo přes sloupcové operace)

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— báze, ve které } T \text{ nabývá JKT}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right)$$