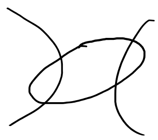
Kuželosečky - dodatek

viděli jsme – převod na kanonický tvar v nějaké ortonormální afinní bázi

Pozn. Každými 5 body v obecné poloze prochází jediná kuželosečka (5 = počet koeficientů rovnice minus 1). Dvě kuželosečky se protínají ve 4 bodech (Bezoutova věta):

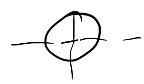


obecněji: křivky stupně m, n se protínají v $m \cdot n$ bodech

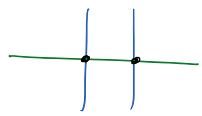
→ paradox: dvě kubické křivky se protínají v 9 bodech, ale na zadání kubické křivky je třeba bodů také 9 (navíc čtyři kubické) ... průsečíky nejsou v ob. pol.

kvadratické rovnice $\xleftrightarrow{\text{nad } \mathbb{C}}$ kuželosečky

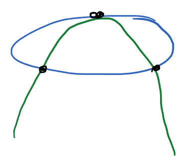
$x^2+y^2-1=0$



soustavy kvadr. rovnic $\longleftrightarrow$???



soustavy lin. rovnic



– homogenní $\longleftrightarrow$ vekt. podpr.
$\xleftarrow{?}$

– nehomogenní $\longleftrightarrow$ afinní podpr.
$\xleftarrow{?}$

rovnice $f(x)=0$ $\longleftrightarrow$ uz. podmn.
∟ spojitá, hladká

dále lin. nerovnice
a jejich soustavy $\longleftrightarrow$ „polyedry"

Univerzální vlastnost báze

co je to báze

$$\alpha : \mathbb{K}^n \xrightarrow{\cong} V \qquad e_i^{std} \longmapsto e_i$$

$\longrightarrow$ izomorfismus $\alpha : \mathbb{K}^n \to V$

inverze $V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ ... souřadnice

$v \longmapsto (v)_\alpha$

transformace souřadnic

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "(\,)_\alpha"', "\cong"] \arrow[dr, "(\,)_\beta", "\cong"'] & \\
\mathbb{K}^n \arrow[rr, "\cong", "(id)_{\beta\alpha}"'] & & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

univ. vlastnost zkusme:

každé zobrazení $\{e_1, \dots, e_n\} \xrightarrow{f_0} W$

se jednoznačně rozšíří na lin. zobr. $V \xrightarrow{f} W$

— z druhé strany: lin. zobr. $V \xrightarrow{f} W$ je jedn. určeno libovolnými svými hodnotami na vektorech báze.

$$\begin{tikzcd}
\{e_i\} \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, hook] & W \\
V \arrow[ur, dashed, "\exists! f"'] &
\end{tikzcd}$$

$\longrightarrow$ funguje to i naopak

Věta. Vektory $v_1, \dots, v_n$ tvoří bázi, jestliže se každé zobrazení $\{v_1, \dots, v_n\} \longrightarrow W$ jednoznačně rozšíří na lin. zobr. $V \longrightarrow W$.

Důkaz.

$$\begin{tikzcd}
\{e_1^{std}, \dots, e_n^{std}\} \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[d, hook] & \{v_1, \dots, v_n\} \arrow[d, hook] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dashed, shift left] & V \arrow[l, dashed, shift left]
\end{tikzcd}$$

$\llcorner$ existují a jsou inverzní $\}$ z univ. vl.

$\Rightarrow$ iso převádí $v_1, \dots, v_n$ na bázi $e_1^{std}, \dots, e_n^{std}$ $\Rightarrow$ je to báze. $\square$

Faktorový prostor

Pokud $V \subseteq U$ je vektorový podprostor, jedná se zejména o normální podgrupu (vzhledem k $+$) a dostáváme faktorgrupu (kvocientovou grupu) $U/V = \{u+V \mid u \in U\}$

U/V opět komutativní grupa

násobení skaláry: $k \cdot (u+V) \overset{\text{def}}{=} ku + V$ (Cv. Dokažte korektnost.)

Definice / Věta. U/V s indukovanými operacemi $+, \cdot$ se nazývá faktorprostor (kvocientový prostor).

Univerzální vlastnost

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "pr"'] & W \\ U/V \arrow[ur, dashed, "\exists! \, \bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

kanonická projekce

$pr(u) = u + V$

Je-li $\varphi : U \to W$ lin. zobr. splňující $\varphi(V) = 0$, pak $\exists!$ lin. zobr. $\bar{\varphi} : U/V \to W$ t.ž.

$$\bar{\varphi} \circ pr = \varphi$$

Cv. Je-li $W \subseteq U$ lib. komplementární podprostor, tj. $U = V \oplus W$, pak složení $W \xrightarrow{in} U \xrightarrow{pr} U/V$ je iso.

Komplementární podpr. vždy existuje — nechť $V = [v_1, \dots, v_k]$ a doplníme $(v_1, \dots, v_k)$ do báze $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ prostoru U. Pak stačí vzít $W = [v_{k+1}, \dots, v_n]$. Zejména $\dim U/V = \dim U - \dim V$.

Duální prostor

Definice. $\mathrm{Hom}(U,V) = \{\text{lin. zobr. } U \to V\}$ vektorový prostor

$(\varphi+\psi)(u) = \varphi(u)+\psi(u)$ … spousta axiomů

$(k\cdot\varphi)(u) = k\cdot\varphi(u)$

→ prostor lin. zobr.

Definice. Duální prostor vektorového prostoru U je

$U^* = \mathrm{Hom}(U,\mathbb{K})$ ← prvky = lin. zobr. $f: U \to \mathbb{K}$
= lineární formy na U

Věta. (o duální bázi) Nechť $\alpha = (e_1,\dots,e_n)$ je báze U. Potom n-tice lineárních forem $\alpha^* = (f^1,\dots,f^n)$ určených hodnotami na bázi

$$f^j(e_i) = \delta^j_i = \begin{cases} 1 & \text{pokud } i=j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

tvoří bázi duálního prostoru.

Důkaz. Nechť $\eta \in U^*$ je lib. lin. forma na U. Chceme ukázat, že ji lze jednoznačně napsat jako

$$\eta = \sum_i y_i \cdot f^i \iff \forall j: \ \eta(e_j) = \sum_i y_i f^i(e_j)$$
$$= \sum_i y_i \cdot \delta^i_j = y_j$$

Máme tedy jediné řešení $y_j = \eta(e_j) \Rightarrow$ $\square$

souřadnice formy $\eta \in U^*$ v bázi α^* jsou $(\eta(e_1),\dots,\eta(e_n))$

→ budeme je zapisovat do řádku !

Souřadnice vektoru $u \in U$: $u = \sum_j x^j \cdot e_j$

$\Rightarrow f^i(u) = \sum_j x^j \cdot f^i(e_j) = x^i \Rightarrow$ souř. jsou $(f^1(u),\dots,f^n(u))^T$

Příklad. $\mathbb{K}^n$ má duální prostor $(\mathbb{K}^n)^* = \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}) = \mathrm{Mat}_{1\times n}(\mathbb{K})$

→ to je důvod, proč souřadnice forem píšeme do řádků

$$\eta \in (\mathbb{K}^n)^*, \ u \in \mathbb{K}^n \Rightarrow \eta(u) = \eta\cdot u = (\eta_1 \cdots \eta_n)\begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} = \eta_1 u^1 + \dots + \eta_n u^n$$

Podmínka duality mezi $(e_1,\dots,e_n)$ a $(f^1,\dots,f^n)$:

$(f^i(e_j)) = (\delta^i_j)$ ← jsou to matice, napravo E

$$(f^1 \cdots f^n)\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1(e_1) & \cdots & f^n(e_1)\\ \vdots & & \vdots \\ f^n(e_n) & \cdots & f^n(e_n)\end{pmatrix} = E$$

Budeme značit $\eta(u) = (\eta, u)_U = (\eta, u)$

$$U^* \times U \xrightarrow{(\,,\,)_U} \mathbb{k}$$
$$(\eta, u) \longmapsto \eta(u)$$

„párování"

dualita pomocí párování: $(f^i, e_j) = \delta^i_j$ sym. role α^*, α

Nechť $u \in U$. Pak $(-, u) : U^* \to \mathbb{k}$ je lin. forma na U^*, tj. prvek $(U^*)^*$.

$\| \; E(u)$ ... „evaluace" v u: $\eta \longmapsto \eta(u)$

Věta (o druhém duálu) Nechť U je vektorový prostor konečné dimenze. Pak zobrazení

$$E : U \longrightarrow (U^*)^*, \qquad u \longmapsto (-, u)$$

je izomorfismus. Budeme proto $U, (U^*)^*$ v tomto případě ztotožňovat.

Důkaz. Ukážeme, že pro bázi $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$ prostoru U budou obrazy $(E(e_1), \dots, E(e_n))$ tvořit bázi $(U^*)^*$, konkrétně duální bázi k duální bázi $\alpha^* = (f^1, \dots, f^n)$:

$$E(e_i)(f^j) = f^j(e_i) = \delta^j_i \quad \checkmark$$

$\square$

Duální lineární zobrazení

$\varphi : U \to V$ indukuje $\varphi^* : V^* \to U^*$

$$\theta \longmapsto \theta \circ \varphi$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\theta\circ\varphi"'] & & V \arrow[dl, "\theta"] \\ & \mathbb{k} & \end{tikzcd}$$

$\theta\circ\varphi = \varphi^*(\theta)$

Pomocí párování:

$$(\varphi^*(\theta), u) = (\theta\circ\varphi, u) = \theta\circ\varphi(u) = \theta(\varphi(u)) = (\theta, \varphi(u))$$

Duální prostor a skalární součin

$U^* \cong U$ — mají stejné dimenze

— nekanonicky — izomorfismů je víc, žádný není lepší

— proto není dobré ztotožňovat

U v.p. se skalárním součinem $U \times U \to \mathbb{R}$

$$R : U \longrightarrow U^*, \qquad u \longmapsto \langle u, - \rangle$$

je izo — stejné dimenze

— $\ker = ?$: $\langle u, - \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle u, u\rangle = 0$

$\Rightarrow u = 0$

Lze použít k identifikaci $U^* \cong U$. Párování pak bude:

$$\begin{tikzcd} U^* \times U \arrow[r, "(\,,\,)_U"] & \mathbb{R} \\ U \times U \arrow[u, "R \times id"] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\langle u, -\rangle, v) \arrow[r, mapsto] & \langle u, v\rangle \\ (u, v) \arrow[u, mapsto] \arrow[ur, mapsto] & \end{tikzcd}$$

Dualita a podprostory.

rovnice $\longleftrightarrow$ řešení

? $\longleftarrow$ $V \subseteq U$

$\eta = 0$

$V \subseteq U \implies V^\perp \subseteq U^*$ definováno: $V^\perp = \{\eta \in U^* \mid \underbrace{\forall v \in V : (\eta, v) = 0}_{\eta \perp V}\}$ „$\langle \eta, v\rangle = 0$"

$\leadsto$ lin. rce $\eta = 0$ splněné na V

$W \subseteq U^* \implies W^\perp \subseteq U$ definováno: $W^\perp = \{u \in U \mid \underbrace{\forall \theta \in W : (\theta, u) = 0}_{W \perp u}\}$

$\leadsto$ řešení soustavy $\theta = 0$, $\theta \in W$

$$\{\text{podprostory } U\} \underset{(\,)^\perp}{\overset{(\,)^\perp}{\rightleftarrows}} \{\text{podprostory } U^*\}$$

Věta. Tato zobrazení jsou vzájemně inverzní a

- převrací uspořádání
- $\dim V^\perp = n - \dim V$
- $(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$
- $(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$

Důkaz. Podstatné jsou dimenze, pak $V \subseteq (V^\perp)^\perp$ budou mít stejné dimenze $\Rightarrow$ budou totožné a zbytek bude jasný.

$$V^\perp = \ker\left(U^* \xrightarrow{res} V^*\right) \qquad \text{surj. zobr., dimenze } n, k$$
$$\eta \longmapsto \eta|_V \qquad \Rightarrow \dim \ker = n - k \qquad \square$$

Tvrzení. Nechť $\eta^1, \dots, \eta^k, \eta \in U^*$. Potom rovnice $\eta = 0$ plyne ze soustavy rovnic $\eta^1 = 0, \dots, \eta^k = 0$, právě když η je lin. kombinací $\eta^1, \dots, \eta^k$:

$$\left(\forall v \in V : \eta^1(v) = 0, \dots, \eta^k(v) = 0 \Rightarrow \eta(v) = 0\right) \implies \eta \in [\eta^1, \dots, \eta^k]$$

Důkaz. $\uparrow$ toto znamená $[\eta^1, \dots, \eta^k]^\perp \subseteq [\eta]^\perp$ — řešení $\eta = 0$

Důkaz. ↑ toto znamená $[y^1,\dots,y^k]^\perp \subseteq [y]^\perp$ — řešení $y=0$

↳ řešení soustavy $y^1=0,\dots,y^k=0$

Aplikací $(\ )^\perp$ dostaneme zpátky $y \in [y] \subseteq [y^1,\dots,y^k]$. □

Podobnou teorii bychom mohli vytvořit pro nehomogenní lineární rovnice (pomocí $A_n \subset \Bbbk^{n+1}$ a redukcí na homogenní lin. rovnice na $\Bbbk^{n+1}$), uvedeme ale pouze jednu pěknou aplikaci.

Věta. Soustava lin. rovnic $Ax+b=0$ nemá řešení, právě když existuje lin. kombinace jejích řádků tvaru $1=0$.

Důkaz. Homogenizace soustavy je $Ax+bx^0=0$ a pomocí ní se neřešitelnost napíše snadno: $Ax+bx^0=0 \Rightarrow x^0=0$.

Podle předchozího tvrzení to pak znamená, že x^0 je lin. kombinací řádků v $Ax+bx^0 \xRightarrow{x^0=1} 1$ je lin. komb. řádků v $Ax+b$. □