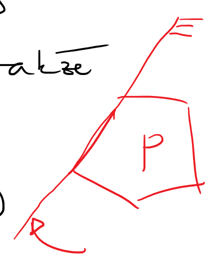
Polyedry – připomenutí

- Polyedr P zadán soustavou lin. nerovnic $Ax \geq b$
  ekvivalentně $P = \text{conv } X + \text{cone } V$
  └ nezáporné kombinace vektorů
  └ konvexní kombinace bodů
- Stěny polyedru P dané nahrazením některých nerovnic v systému $Ax \geq b$ rovnicemi $F = \{Ax \geq b, A'x = b'\}$



- Minimální stěny: nerovnice z $Ax \geq b$ nejsou potřeba, takže $F = \{A'x = b'\}$
- Bodovaný polyedr: minimální stěny jsou body $\to$ vrcholy
- Příklad: $P = \{Ax = b, x \geq 0\}$ je bodovaný, vrcholy jsou dány podsystémem $x \geq 0$, tj. $\{x^i \geq 0, i \in L\} = \{x_L \geq 0\}$
  $\to V = \{Ax = b, x_L = 0\}$ lze vybrat nezávislé rovnice
  pak $\text{rk } A = \text{row-dim } A = k$, $|L| = n-k$.

$Ax = b$
$x^{i+1} = 0$
$\vdots$
$x^n = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A} & b \\ 0 & E & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} A_K & A_L & b \\ \underbrace{0 \quad E}_{} & & 0 \end{array}\right)$$

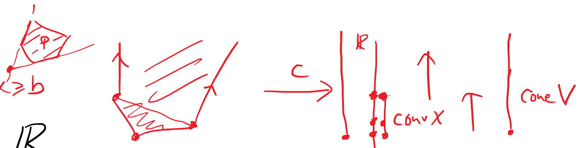
0: $(n-i) \times i$

$L = \{i+1, \dots, n\}$
$|L| = n-i$

$\text{rk} = n$, můžeme předp. $k + (n-i) = n \Rightarrow i = k$

Lineární programování

$\min\{\underbrace{cx}_{\text{lin. fce}} \mid \underbrace{Ax \geq b}_{\text{polyedr}}\} \to A'x = b'$ · má jediné řeš. · na něm platí $A'x \geq b$



$A_n \xrightarrow{c} \mathbb{R}$

$\cup$I

$P = \operatorname{conv} X + \operatorname{cone} V$

$cP = \underbrace{\operatorname{conv} cX}_{\text{omezený interval}} + \underbrace{\operatorname{cone} cV}_{0/\mathbb{R}_+/\mathbb{R}_-/\mathbb{R}} \leftarrow$ interval

$cV \ni t > 0$

$cV \ni t < 0$

zdola neomezená / min. ex.

$\Uparrow$

Pokud $\min = \delta$, pak nastává na množině

$P \cap \{cx = \delta\} \leftarrow$ stěna (protože $cx \geq \delta$ na P)

Pokud je P bodovaný, obsahuje každá stěna vrchol (min. stěna).

Simplexová metoda — chytré prohledávání vrcholů $\to$ min

$\hookrightarrow \{\delta \mid \exists x : Ax \geq b, cx = \delta\}$ + Motzkinova elim.

$$\min\{cx \mid Ax \geq b\} = \min\{cx_+ - cx_- \mid Ax_+ - Ax_- \geq b,\ x_+ \geq 0,\ x_- \geq 0\}$$

$x = x_+ - x_-$ $\quad x^i = x^i_+ - x^i_-,\quad x^i_+ \geq 0,\ x^i_- \geq 0$

$$\min\{cx \mid Ax \geq b,\ x \geq 0\} = \min\{cx \mid Ax - s = b,\ x \geq 0,\ s \geq 0\}$$

$s = Ax - b$

$\min\{cx \mid \underbrace{Ax = b,\ x \geq 0}_{\text{bodovaný polyedr}}\}$ je úloha lin. progr. — dále se bude hodit $b \geq 0$, toho lze dosáhnout případným násobením řádků (-1)

Příklad.

	x^1	x^2	x^3	x^4			
	1	1	-4	2	$\geq$	4	$\to -x^5$
	-3	1	-2	0	$\leq$	6	$\to +x^6$
	0	1	0	-1	$=$	-1	$\to / \cdot (-1)$
	1	1	-1	0	$=$	0	
max:	-3	2	-1	4			$\to / \cdot (-1)$
	lib	lib	≥ 0	≥ 0			
	$x^1_+ - x^1_-$	$x^2_+ - x^2_-$					

$x^1 + x^2 - 4x^3 + 2x^4 \geq 4$

$-3x^1 + x^2 - 2x^3 \leq 6$

$=$

$=$

$\max\{-3x^1 + 2x^2 - x^3 + 4x^4 \mid \ \}$

	1	-1	1	-1	-4	2	-1	0	4
	-3	3	1	-1	-2	0	0	1	6
	0	0	-1	+1	0	+1	0	0	+1
	1	-1	1	-1	-1	0	0	0	0
min:	3	-3	-2	2	1	-4	0	0	0

$\to$ vyřešíme později

$\min\{3x^1 - 2x^2 + x^3 - 4x^4 \mid \dots\}$

Dualita

několik možností ... jedna je min ex $\Leftrightarrow$ max ex

Věta. $\min\{cx \mid Ax \geq b\} \overset{\circ}{=} \max\{yb \mid c = yA,\ y \geq 0\}$

infimum = max. dolní závora

Důkaz. $\min\{cx \mid Ax \geq b\} = \max\{\delta \mid cx \geq \delta$ platí na $P: Ax \geq b\}$

plus nerovnice $0x \geq -1$ netřeba

$= \max\{\delta \mid \exists y \geq 0:\ \underbrace{c = yA,\ \delta = yb}_{(c \mid \delta) = y \cdot (A \mid b)}\}$

$= \max\{yb \mid c = yA,\ y \geq 0\}.$ $\square$

Pozn. $\geq$ jednoduché: $Ax \geq b$, $c = yA,\ y \geq 0$ $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $cx \geq yb$

$yb \leq yAx = cx$

cx min, max yb

Symetrická verze:

$\min\{cx \mid Ax \geq b,\ x \geq 0\} = \max\{yb \mid c \geq yA,\ y \geq 0\}$

Simplexová metoda:

Pro simplexovou metodu budeme předpokládat tvar

$\min\{cx \mid \underbrace{Ax = b,\ x \geq 0}_{\text{bodovaný polyedr}}\}$ – prvky jsou tzv. přípustná řešení

a dále: hodnost A = počet řádků $A = k$

$\Rightarrow$ vrcholy jsou popsány podmnožinami $L \subseteq \{1, \dots, n\}$, $|L| = n-k$, K – doplněk

tj. $Ax = b,\ x_L = 0$

x_L ← souřadnice s indexy z L

soustavu $Ax = b$ lze přepsat do ekvivalentního tvaru

$$\begin{array}{c} \\ rk = n \left\{ \right. \end{array} \begin{array}{ccc} x_K & x_L & \\ (A_K & A_L & \mid b) \\ (0 & E & \mid 0) \end{array} \sim (E \mid \bar{A}_L \mid \bar{b}) \Rightarrow x_K = \bar{b} - \bar{A}_L x_L$$

$\Downarrow$ A_K regulární; $A_K^{-1} \cdot (\ )$

$\rightsquigarrow$ odpovídá vrcholu $(\bar{b} \mid 0)$ (x_K, x_L)

$x_L = 0 \Rightarrow x_K = \bar{b}$

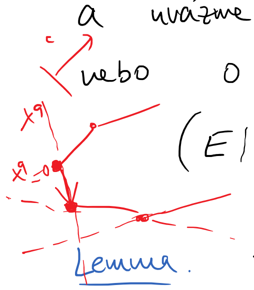
$\Rightarrow$ vyjádříme funkci cx na polyedru přípustných řešeních pomocí $x_K = \bar{b} - \bar{A}_L x_L$ jako $c(x_K, x_L) = c(\bar{b} - \bar{A}_L x_L, x_L) = c_L(x_L) = c\bar{b} + \bar{\gamma}_{k+1} x^{k+1} + \dots + \bar{\gamma}_n x^n$

Lemma. Jsou-li ve vyjádření c_L všechny koeficienty nezáporné, je vrchol $(\bar{b} \mid 0)$ optimálním řešením, tj. bodem, kde nastává min. $\square$

Předpokládejme tedy, že koef. u x^q, $q \in L$, je záporný

a uvažme $\{Ax = b,\ x \geq 0\} \cap \{x_{L \setminus q} = 0\}$ – je to stěna dimenze 1

nebo 0, protože se jedná o polyedr v $\{Ax = b,\ x_{L \setminus q} = 0\}$ ← dim 1



$$(E \mid \bar{A}_L \mid \bar{b}) = \left(E \,\middle|\, \begin{matrix} \bar{a}_{1q} \\ \vdots \\ \bar{a}_{kq} \end{matrix} \,\middle|\, \bar{A}_{L \setminus q} \,\middle|\, \bar{b}\right)$$

hrana: $x^1 + \bar{a}_{1q} x^q + 0 = \bar{\beta}^1$; $\vdots$; $x^k + \bar{a}_{kq} x^q + 0 = \bar{\beta}^k$; $x_{L \setminus q} = 0$; $x \geq 0$

Lemma. Pokud jsou všechna $\bar{a}_{iq} \leq 0$,

je tato hrana neomezená (x^q může být libovolně velké) a cx ...

podél této hrany klesá $\Rightarrow$ minimum neexistuje.

Důkaz. $x^i = \bar\beta^i - \bar a_{iq} x^q \geq 0$ pro libovolné $x^q \geq 0$. (protože $\beta^i \geq 0$, je to souřadnice vrcholu) $\square$

Naopak každá rovnice $x^i + \bar a_{iq} x^q = \bar\beta^i$ s $\bar a_{iq} > 0$ dá omezení

$$x^q = 1/\bar a_{iq} \, (\bar\beta^i - x^i) \leq 1/\bar a_{iq} \, \bar\beta^i = \bar\beta^i / \bar a_{iq}$$

protože $x^i \geq 0$

Vezmeme index $p = i$ pro který je toto omezení $\bar\beta^i/\bar a_{iq}$ minimální.
To odpovídá druhému vrcholu hrany: bude mít

$$\underbrace{x_{L\setminus q} = 0, \; x^p = 0}_{x_{L\setminus q \cup p}} \qquad (\Rightarrow x^q = \bar\beta^p / \bar a_{pq})$$

$\Rightarrow$ nahrazením $L \rightsquigarrow L\setminus q \cup p$ dostaneme vrchol s menší hodnotou cx.
případně stejnou:

Poznámka Ve skutečnosti se může stát, že $\bar\beta^p/\bar a_{pq} = 0$ a bude se jednat o stejný vrchol popsaný jinou indexovou množinou L.
Algoritmus by se mohl zacyklit ... Blandovo pravidlo tomuto zamezuje $\rightsquigarrow$ volí se co nejmenší q a co nejmenší p ...

Příklad $\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c & 0 \end{array}\right) \leftarrow \min\{cx \mid Ax = b, \; x \geq 0\}$

$$\begin{array}{cccccc} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & 2 & 0 & 48 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 60 \\ \hline \underbrace{-6 & \boxed{-14} & -13}_{c_L} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$48/4 = 12$
$60/2 = 30$

vrchol: $x^1 = x^2 = x^3 = 0$ $(0,0,0,24,60)$
hrana podél níž funkční hodnota klesá: $x^1 = x^3 = 0$ $q = 2$
druhý vrchol daný: $x^4 = 0$ $p = 4$
$\{1,2,3\} \rightarrow \{1,3,4\}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & 2 & 0 & 48 \\ 1 & 0 & 6 & -2 & 2 & 72 \\ \hline -5/2 & 0 & \boxed{-6} & 7 & 0 & 168 \end{array}\right) \sim$$

$48/2 = 24$
$72/6 = 12$

vrchol $(0,12,0,0,36)$

$c + 7/2 \cdot$ „první rovnice" .. na P to samé

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 12 & 0 & 8 & -2 & 72 \\ 1 & 0 & 6 & -2 & 2 & 72 \\ \hline \boxed{-3/2} & 0 & 0 & 5 & 2 & 240 \end{array}\right) \sim$$

$\rightarrow \{1,4,5\}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 12 & 0 & 8 & -2 & 72 \\ 0 & -12 & 12 & -12 & 6 & 72 \\ \hline 0 & 9 & 0 & 11 & 1/2 & 294 \end{array}\right)$$

$\rightarrow \{2,4,5\}$

1. lemma $\rightarrow$ jedná se o minimum $(36,0,6,0,0)$ s funkční hodnotou -294: $\left(\begin{array}{c|c} Ax-b & 0 \\ \hline cx-0 & \end{array}\right)$

$c = 9x^2 + 11x^4 + 1/2\, x^5 - 294$ na P

Začátek. Vysvětlili jsme jak zjistit, zda vrchol je optimálním řešením, případně zda optimum neexistuje, případně jak nalézt vrchol s menší hodnotou funkce cx. Zbývá nalézt počáteční vrchol. „začátek indukce"

V definiční soustavě

$$Ax=b,\ x\geq 0$$

můžeme předpokládat $b\geq 0$.

Vyřešme optimalizační problém s přidanými proměnnými $t^1,\dots,t^k$ „umělými"

$$\min\{\mathbb{1}t \mid Ax+t=b,\ x\geq 0,\ t\geq 0\}$$

$$\mathbb{1}t = t^1+\dots+t^k = (1\ \dots\ 1)\begin{pmatrix}t^1\\ \vdots\\ t^k\end{pmatrix}$$

⟶ přípustné řešení (x,t) má: • $x\geq 0$ splňující $Ax\leq b$ • $t=b-Ax$

⟶ ex. příp. řešení $(0,b)$ & umíme začít

Lemma. $\min = 0 \iff$ původní úloha má přípustné řešení. □

Pokud je min výsledku 0, můžeme dodatečnými úpravami dosáhnout popisu příslušného vrcholu pomocí množiny L odpovídající některým proměnným x^i a všem proměnným t^i. Zahozením umělých proměnných t^i pak získáme vrchol původního polyedru, popsaný právě těmi indexy z L odpovídajícími pův. prom.

Příklad. $c=(3\ \ -3\ \ -2\ \ 2\ \ 1\ \ -4)$

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
1 & -1 & 1 & -1 & -4 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4\\
-3 & 3 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6\\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
\hline
3 & -3 & -2 & 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{1\quad -1\quad 1\quad -1\quad -4\quad 2\quad -1}}^{L} & \overbrace{\hphantom{0\quad 1\quad 0\quad 0}}^{K} \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
1 & -1 & 1 & -1 & -4 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4\\
-3 & 3 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6\\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right)\\
\begin{array}{ccccccccccc|c}
-2 & 2 & -1 & 1 & 5 & \boxed{-3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5
\end{array}
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
1 & -1 & 1 & -1 & -4 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4\\
-3 & 3 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6\\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
\hline
-2 & 2 & -1 & 1 & 5 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5
\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
-2 & 2 & -1 & 1 & 5 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5
\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
1 & -1 & 3 & -3 & -4 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\
-3 & 3 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
-2 & 2 & \boxed{-4} & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2
\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
1 & -1 & 3 & -3 & -4 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\
-3 & 3 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
-2 & 2 & -4 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2
\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
-2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 \\
-4 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 6 \\
1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
2 & \boxed{-2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & -2
\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
-2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 \\
-4 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 6 \\
1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & -2
\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
-2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 4 & 5 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\
0 & 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\
\hline
\cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0}
\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccccccc|c}
3 & -3 & -2 & 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-19/2} & 0 & -9/2 & 0 & 13
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
-2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2
\end{array}\right.$$

$$
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & -1 & 0 & 2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -19/2 & 0 & -9/2 & 0 & 13
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
-2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & 10 \\
0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 5 & 3 & 8 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 29/2 & 19/2 & 32
\end{array}\right)
$$

$\Rightarrow$ vrchol $(0\ 2\ 4\ 0\ 2\ 5\ 0\ 0)$ je optimálním řešením.

$\times\ \times$

$(-2\ \ 4\ \ 2\ \ 5)$ optimum v původní úloze

− optimální hodnota +32

min → max