Symetrické a antisymetrické tenzory

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(\otimes^p U, V) & \supseteq & \mathrm{Hom}(S^p U, V) & \Rightarrow & S^p U \text{ je} \dots \\ \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} & & \\ \mathrm{Lin}_p(U,\dots,U;V) & \supseteq & \mathrm{Lin}_p(U,\dots,U;V)_{sym} & & \end{array}$$

Definice. Řekneme, že p-lineární zobrazení $\Phi: U\times\dots\times U \to V$ je *symetrické*, jestliže pro každou permutaci $\sigma\in\Sigma_p$ platí

$$\begin{array}{ccc} \Phi(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(p)}) & = & \Phi(u_1,\dots,u_p) \\ \| & & \| \\ G(u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)}) & & G(u_1\otimes\dots\otimes u_p) \end{array}$$

tj. budeme chtít $u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)} - u_1\otimes\dots\otimes u_p \in \ker G$

Definice. Definujme *symetrickou mocninu* S^pU jakožto kvocient

$$S^pU = \otimes^p U \big/ \mathrm{span}\{u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)} - u_1\otimes\dots\otimes u_p \mid \sigma\in\Sigma_p,\ u_1,\dots,u_p\in U\}$$
$$= \mathrm{span}\{p_\sigma(t)-t \mid \sigma\in\Sigma_p,\ t\in\otimes^pU\}$$

Označme $pr: \otimes^p U \to S^p U$ kanonickou projekci

$$pr(u_1\otimes\dots\otimes u_p) = \text{třída } u_1\otimes\dots\otimes u_p =: u_1\vee\dots\vee u_p = u_1\dots u_p$$

Protože

$$\begin{array}{ccc} pr(u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)}) & \overset{\text{rozdíl } 0 \text{ v kvocientu}}{=} & pr(u_1\otimes\dots\otimes u_p) \\ \| & & \| \\ u_{\sigma(1)}\vee\dots\vee u_{\sigma(p)} & & u_1\vee\dots\vee u_p \end{array}$$

je tento součin vektorů komutativní, lépe symetrický:

$$(u_1,\dots,u_p) \longmapsto u_1\vee\dots\vee u_p$$

$$\begin{tikzcd}
\Pi^p U \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[d, "t"] \arrow[dd, bend right=60, "t^{sym}\ \text{sym}\ p\text{-lin}"'] & & V \\
\otimes^p U \arrow[urr, dashed, "\exists!\, G"] \arrow[d, "pr"] & & \\
S^p U \arrow[uurr, dashed, "\exists!\, F"'] & &
\end{tikzcd}$$

Φ sym. p-lin.

$\Rightarrow$ ex. jediné G lineární a $G(u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)} - u_1\otimes\dots\otimes u_p) = 0$

$\Rightarrow$ ex. jediné F lineární

$$F(u_1\vee\dots\vee u_p) = \Phi(u_1,\dots,u_p)$$

Reformulace. Zobrazení

$$\mathrm{Hom}(S^pU, V) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Lin}_p(U,\dots,U;V)_{sym}$$
$$F \longmapsto F\circ t^{sym}$$

je bijekce.

Poznámka. Dá se ukázat, že $(S^p U)$ je kvocientem $(T^p U) = (T^p_0 U)$ podle ideálu $\Rightarrow$ je to opět algebra se součinem

$$\begin{array}{ccc} T^p U \times T^q U & \longrightarrow & T^{p+q} U \\ \downarrow{\scriptstyle pr \times pr} & & \downarrow{\scriptstyle pr} \\ S^p U \times S^q U & \overset{\vee}{\dashrightarrow} & S^{p+q} U \end{array}$$

Označme $\underbrace{e_1 \vee \dots \vee e_1}_{a_1 \times} \vee \dots \vee \underbrace{e_n \vee \dots \vee e_n}_{a_n \times} = e_1^{a_1} \dots e_n^{a_n}$

Věta. $\{e_1^{a_1} \dots e_n^{a_n} \mid a_1 + \dots + a_n = p\}$ tvoří bázi $S^p U$.

Důkaz. Je potřeba ukázat, že $F: S^p U \to V$ je jedn. určeno svými lib. hodnotami na $e_1^{a_1} \dots e_n^{a_n}$. Ekvivalentně $\Phi: U \times \dots \times U \to V$ symetrické p-lineární je jedn. určeno svými lib. hodnotami na $(e_1, \dots, e_1, \dots, e_n, \dots, e_n)$ ... tedy $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ kde $i_1 \leq \dots \leq i_p$. □

Příklad. $U = (\mathbb{k}^n)^*$ s bází $(f^1, \dots, f^n) = (x^1, \dots, x^n)$

$\Rightarrow$ $S^p (\mathbb{k}^n)^*$ má bázi $(x^1)^{a_1} \dots (x^n)^{a_n}$ = homogenní polynomy stupně p

$S^p (\mathbb{k}^n)^* \cong \mathbb{k}^{(p)}[x^1, \dots, x^n]$

$\Rightarrow$ $S(\mathbb{k}^n)^* \cong \mathbb{k}[x^1, \dots, x^n]$ ... známe, z pohledu lin. alg. méně zajímavé

Pozn. symetrie tenzorů $\neq$ symetrie polynomu

Pozn. $\otimes^p U \underset{\longleftarrow}{\longrightarrow} S^p U$ $\Rightarrow$ $S^p U$ je izomorfní podprostoru $S^p U \subseteq \otimes^p U$, viz cv.

Antisymetrické tenzory

Definice. Řekneme, že p-lineární zobrazení $\Phi: U \times \dots \times U \to V$ je antisymetrické, jestliže pro každou permutaci $\sigma \in \Sigma_p$ platí

$$\Phi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)}) = \Phi(u_1, \dots, u_p) \cdot \operatorname{sign}\sigma$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$G(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)}) \qquad G(u_1 \otimes \dots \otimes u_p) \cdot \operatorname{sign}\sigma$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Lin}_p(U, \dots, U; V) & \cong & \mathrm{Hom}(\otimes^p U, V) \\ \cup\!| & & \cup\!| \\ \mathrm{Lin}_p(U, \dots, U; V)_{alt} & & \mathrm{Hom}(\Lambda^p U, V) \\ \Psi & & \Psi \\ \Phi & & G \end{array}$$

tj. budeme chtít $u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(p)} - u_1 \otimes \dots \otimes u_p \cdot \operatorname{sign}\sigma \in \ker G$

Definice. Definujme **antisymetrickou mocninu** $\Lambda^p U$ jakožto kvocient

$$\Lambda^p U = \bigotimes^p U \Big/ \operatorname{span}\{u_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes u_{\sigma(p)} - u_1\otimes\cdots\otimes u_p\cdot\operatorname{sign}\sigma \mid \sigma\in\Sigma_p,\ u_1,\dots,u_p\in U\}$$
$$= \operatorname{span}\{p_\sigma(t) - t\cdot\operatorname{sign}\sigma \mid \sigma\in\Sigma_p,\ t\in\bigotimes^p U\}$$

Označme $\operatorname{pr}\colon \bigotimes^p U \to \Lambda^p U$ kanonickou projekci

$$\operatorname{pr}(u_1\otimes\cdots\otimes u_p) = \text{třída } u_1\otimes\cdots\otimes u_p =: u_1\vee\cdots\vee u_p = u_1\cdots u_p$$

Protože
$$\underbrace{\operatorname{pr}(u_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes u_{\sigma(p)})}_{u_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge u_{\sigma(p)}} \overset{\text{rozdíl 0 v kvocientu}}{=} \underbrace{\operatorname{pr}(u_1\otimes\cdots\otimes u_p\cdot\operatorname{sign}\sigma)}_{u_1\wedge\cdots\wedge u_p\cdot\operatorname{sign}\sigma}$$

je tento součin vektorů antikomutativní, lépe antisymetrický:

$$\begin{tikzcd}
(u_1,\dots,u_p) \arrow[ddd, mapsto] & \prod^p U \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[d, "t"] \arrow[dd, bend right, "t^{alt}\ \text{antisym. } p\text{-lin}"'] & & V \\
& \bigotimes^p U \arrow[d, "\operatorname{pr}"] \arrow[urr, dashed, "\exists!\,G"] & & \\
& \Lambda^p U \arrow[uurr, dashed, "\exists!\,F"'] & & \\
u_1\vee\cdots\vee u_p & & &
\end{tikzcd}$$

Φ antisym. p-lin.

$\Rightarrow$ ex. jediné G lineární a
$$G(u_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes u_{\sigma(p)} - u_1\otimes\cdots\otimes u_p\cdot\operatorname{sign}\sigma) = 0$$

$\Rightarrow$ ex. jediné F lineární
$$F(u_1\wedge\cdots\wedge u_p) = \Phi(u_1,\dots,u_p)$$

Reformulace. Zobrazení

$$\operatorname{Hom}(\Lambda^p U, V) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Lin}_p(U,\dots,U; V)_{alt}$$
$$F \longmapsto F\circ t^{alt}$$

je bijekce.

Věta. $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p} \mid i_1<\cdots<i_p\}$ tvoří bázi $\Lambda^p U$.

Důkaz. Je potřeba ukázat, že $F\colon \Lambda^p U\to V$ je jedn. určeno svými lib. hodnotami na $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$. Ekvivalentně $\Phi\colon U\times\cdots\times U\to V$ antisymetrické p-lineární je jedn. určeno svými lib. hodnotami na $(e_{i_1},\dots,e_{i_p})$, kde $i_1<\cdots<i_p$.

Nová ingredience: $\Phi(\dots, e_i, e_i, \dots) = (-1)\cdot\Phi(\dots, e_i, e_i, \dots) \Rightarrow$ nulová hodnota. □

prohození = transpozice $\Rightarrow$ znaménko (-1)

S posledním řádkem se váže: $u_1\wedge\cdots\wedge u_p = 0$ pokud $u_i = u_j$ pro nějaké $i\neq j$.

Věta. $u_1\wedge\cdots\wedge u_p = 0 \iff$ vektory $u_1,\dots,u_p$ jsou lineárně závislé.

Důkaz. Nechť jsou $u_1,\dots,u_p$ lin. záv., například $u_p = a^1u_1+\cdots+a^{p-1}u_{p-1}$

Důkaz. Nechť jsou $u_1, \dots, u_p$ lin. záv., například $u_p = a^1 u_1 + \dots + a^{p-1} u_{p-1}$

$$\Rightarrow u_1 \wedge \dots \wedge u_{p-1} \wedge u_p = u_1 \wedge \dots \wedge u_{p-1} \wedge (a^1 u_1 + \dots + a^{p-1} u_{p-1})$$

$$= a^1 \cdot u_1 \wedge \dots \wedge u_{p-1} \wedge u_1 + \dots + a^{p-1}\, u_1 \wedge \dots \wedge u_{p-1} \wedge u_{p-1}$$

$$= 0 \qquad \text{(vždy jeden vektor dvakrát)}$$

Nechť jsou $u_1, \dots, u_p$ lin. nezáv. a doplníme je do báze $u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n$.
Pak $u_1 \wedge \dots \wedge u_p$ je jeden z bázových vektorů $\Lambda^p U$ $\Rightarrow$ je nenulový $\square$

$\Rightarrow \dim \Lambda^p U = \binom{n}{p}$, zejména

- $\Lambda^p U = 0$ pokud $p > \dim U$
- $\Lambda^n U$ má dimenzi 1 pro $n = \dim U$
  $\ni e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ generátor

Věta. $\varphi: U \longrightarrow V$ lin. zobr. $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$ báze U, $\bar{\alpha} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ báze V

$$\Rightarrow \Lambda^n \varphi (e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \det(\varphi)_{\bar{\alpha}\alpha} \cdot \bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_n$$

nemusí být báze

$$\begin{array}{ccc}
\Pi^n U & \xrightarrow{\Pi^n \varphi} & \Pi^n V \\
p \downarrow & & \downarrow p \\
\otimes^n U & \xrightarrow{\otimes^n \varphi} & \otimes^n V \\
pr \downarrow & & \downarrow pr \\
\Lambda^n U & \xrightarrow{\Lambda^n \varphi} & \Lambda^n V \\
\ni & & \ni \\
e_1 \wedge \dots \wedge e_n & & \bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_n
\end{array}$$

$$\otimes^n \varphi (u_1 \otimes \dots \otimes u_n) = \varphi(u_1) \otimes \dots \otimes \varphi(u_n)$$

$$\Lambda^n \varphi (u_1 \wedge \dots \wedge u_n) = \varphi(u_1) \wedge \dots \wedge \varphi(u_n)$$

Důkaz. Jedná se o výpočet:

$$\Lambda^n \varphi (e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \varphi(e_1) \wedge \dots \wedge \varphi(e_n)$$

$$= \Big(\sum_{i_1} a_1^{i_1} \bar{e}_{i_1}\Big) \wedge \dots \wedge \Big(\sum_{i_n} a_n^{i_n} \bar{e}_{i_n}\Big)$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_n} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n}\ \bar{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{i_n} \qquad i_1 = \sigma(1), \dots, i_n = \sigma(n)$$

$$= \sum_{\sigma} a_1^{\sigma(1)} \cdots a_n^{\sigma(n)}\ \bar{e}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma} a_1^{\sigma(1)} \cdots a_n^{\sigma(n)} \operatorname{sign}\sigma \cdot \bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_n$$

$$= \det \varphi \cdot \bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_n . \qquad \square$$

Důsledek. $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$, $\bar{\alpha} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ báze U, $(e_1, \dots, e_n) = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) \cdot P$

$\Rightarrow e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \det P \cdot \bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_n$ $\qquad P = (id)_{\bar{\alpha}\alpha}$

Důsledek. $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$, $\bar{\alpha} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ báze U, $(e_1, \dots, e_n) = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) \cdot P$

$\Rightarrow$ $e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \det P \cdot \bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_n$ $\quad \dots \quad$ $P = (id)_{\bar{\alpha}\alpha}$

Důsledek. $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$ báze U, $\varphi : U \to U$ operátor

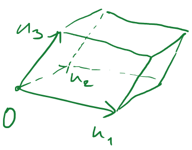
$\Rightarrow$ $\Lambda^n \varphi : \Lambda^n U \to \Lambda^n U$ je násobení číslem $\det \varphi = \det (\varphi)_{\alpha\alpha}$ nezávisle na α.

$\Rightarrow$ $\det (\psi \circ \varphi) = \det \psi \cdot \det \varphi$

Objemy, orientace

Definice. Objemová forma na vektorovém prostoru U dimenze n je nenulová antisymetrická n-lineární forma

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Lin}_n(U,\dots,U;\mathbb{k}) & \cong & \mathrm{Hom}(\Lambda^n U,\mathbb{k}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathrm{Vol} & \longleftrightarrow & \mathrm{vol} \end{array}$$



$\Rightarrow$ $\mathrm{Vol}(u_1,\dots,u_n) = \mathrm{vol}(u_1\wedge\dots\wedge u_n)$ … orientovaný objem rovnoběžnostěnu určeného $u_1,\dots,u_n$

$\Rightarrow$ vol jednoznačně určeno lib. hodnotou

$$0 \neq \mathrm{vol}(e_1\wedge\dots\wedge e_n) = \mathrm{Vol}(e_1,\dots,e_n) \quad \dots \quad (e_1,\dots,e_n) \text{ báze } U$$

Díky předchozímu: $(u_1,\dots,u_n) = (e_1,\dots,e_n)\cdot P$ — matice souřadnic vektorů $u_1,\dots,u_n$ vzhledem k bázi $e_1,\dots,e_n$

$P = \big((u_1)_\alpha \ \cdots \ (u_n)_\alpha\big)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(u_1,\dots,u_n) &= \mathrm{vol}(u_1\wedge\dots\wedge u_n) = \mathrm{vol}(\det P\cdot e_1\wedge\dots\wedge e_n) \\ &= \det P\cdot \mathrm{vol}(e_1\wedge\dots\wedge e_n) \\ &= \det P\cdot \mathrm{Vol}(e_1,\dots,e_n) \end{aligned}$$

Příklad. Standardní objemovou formou na $\mathbb{k}^n$ rozumíme tu, pro kterou $\mathrm{Vol}(\underbrace{e_1,\dots,e_n}_{\text{std. báze } \mathbb{k}^n}) = 1$. Pak

$$\mathrm{Vol}(u_1,\dots,u_n) = \det(u_1 \cdots u_n).$$

Nechť $\varphi: U \to U$ je operátor. Pak

$$\mathrm{Vol}(\varphi(u_1),\dots,\varphi(u_n)) = \det\varphi\cdot\mathrm{Vol}(u_1,\dots,u_n)$$

tj. zobrazení φ zvětšuje orientovaný objem $\det\varphi$-krát.

orientovaný objem = orientovaný + objem

$$\mathrm{Vol}(u_1,\dots,u_n) = \operatorname{sign}\mathrm{Vol}(e_1,\dots,e_n)\cdot|\mathrm{Vol}(e_1,\dots,e_n)|$$

Definice. Orientace reálného vektorového prostoru U je zobrazení

$$\operatorname{sign}: \{\text{báze } U\} \longrightarrow \{\pm 1\}$$

splňující $\bar\alpha = \alpha\cdot P \Rightarrow \operatorname{sign}\bar\alpha = \operatorname{sign}\det P\cdot\operatorname{sign}\alpha$

$\bar e_1\wedge\dots\wedge\bar e_n = c\cdot e_1\wedge\dots\wedge e_n$ pro $c>0$ resp. $c<0$

Podrobněji … $\operatorname{sign}\bar\alpha = \operatorname{sign}\alpha$ pro souhlasně orientované báze

$\operatorname{sign}\bar\alpha = -\operatorname{sign}\alpha$ pro opačně orientované báze

Pozn. souhlasná orientace $\longrightarrow$ rozklad na dvě třídy, sign = označení $\begin{cases}\text{kladné báze}\\ \text{záporné báze}\end{cases}$

Příklad. • $\mathbb{R}^n$ má standardní orientaci danou tím, že standardní báze je kladná: $\operatorname{sign}(e_1, \dots, e_n) = +1$.

• Komplexní vektorový prostor U chápaný jako reálný vektorový prostor $U^{\mathbb{R}}$ má standardní orientaci danou:

$$(e_1, \dots, e_n) \text{ báze } U \implies (e_1, \dots, e_n, i \cdot e_1, \dots, i \cdot e_n) \text{ kladná báze } U^{\mathbb{R}}$$

• Vektorový prostor dimenze 0, tj. $0 = \{0\}$ má jedinou bázi a ta může být pořád kladná nebo záporná.

Orientovaný eukleidovský prostor

Nechť U je or. eukl. pr., $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$, $\bar{\alpha} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ dvě kladné ortonormální báze. Pak $\bar{\alpha} = \alpha \cdot P$ a P má:

- $\det P > 0$ protože $\bar{\alpha}, \alpha$ mají souhlasnou orientaci
- $|\det P| = 1$ protože P je ortogonální $(P^* P = E \Rightarrow |\det P|^2 = 1)$

$\implies \det P = 1$.

Definujme kanonickou objemovou formu požadavkem

$$\mathrm{Vol}(e_1, \dots, e_n) = 1 \quad \text{pro libovolnou kladnou ortonormální bázi}$$

$$(\Rightarrow \mathrm{Vol}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) = \det P \cdot \mathrm{Vol}(e_1, \dots, e_n) = \mathrm{Vol}(e_1, \dots, e_n))$$

Nechť $(u_1, \dots, u_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot P \implies P = ((u_1)_\alpha \cdots (u_n)_\alpha) = (f^i(u_j))$

Pak

$$\mathrm{Vol}(u_1, \dots, u_n) = \det P \cdot \mathrm{Vol}(e_1, \dots, e_n) = \det P$$

$$\mathrm{Vol}(u_1, \dots, u_n)^2 = \det P^T \cdot \det P = \det(P^T \cdot P)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} (u_1)_\alpha^T \\ \vdots \\ (u_n)_\alpha^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (u_1)_\alpha & \cdots & (u_n)_\alpha \end{pmatrix}\right)$$

$$\underbrace{= \det \underbrace{\begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \cdots & \langle u_1, u_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle u_n, u_1 \rangle & \cdots & \langle u_n, u_n \rangle \end{pmatrix}}_{\text{Gramova matice}}}_{\text{Gramův determinant}} = \det(\langle u_i, u_j \rangle)$$

Věta. • $\mathrm{Vol}(u_1, \dots, u_n) = \det(f^i(u_j))$ v lib. kl. ortonorm. bázi ... znaménko

• $\mathrm{Vol}(u_1, \dots, u_n)^2 = \det(\langle u_i, u_j \rangle)$ nezávislé na orientaci

Pozn. Gramův–Schmidtův ortogonalizační proces

$$(u_1, \dots, u_n) \rightsquigarrow \underset{\text{ortogonální}}{(v_1, \dots, v_n)} \qquad v_i = u_i + \text{lin. komb. } u_1, \dots, u_{i-1}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det P = 1$$

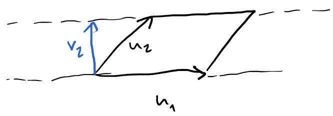
$$\implies \mathrm{Vol}(u_1, \dots, u_n)^2 = \mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_n)^2$$

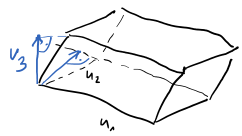
$$1 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \ddots \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Vol}(u_1, \dots, u_n)^2 = \mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_n)^2$$
$$= \det \begin{pmatrix} |v_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |v_n|^2 \end{pmatrix} = |v_1|^2 \cdots |v_n|^2$$

$$\Rightarrow \quad |\mathrm{Vol}(u_1, \dots, u_n)| = |v_1| \cdots |v_n| = \text{objem rovnoběžnostěnu}$$

je to fakt objem!





Geometrie v orientované eukleidovské rovině.

$$\mathrm{Vol}(u,v)^2 = \det \begin{pmatrix} \langle u,u \rangle & \langle u,v \rangle \\ \langle v,u \rangle & \langle v,v \rangle \end{pmatrix} = |u|^2 |v|^2 - (|u| \cdot |v| \cdot \cos\alpha)^2$$
$$= |u|^2 \cdot |v|^2 \cdot \sin^2\alpha$$

$$|\mathrm{Vol}(u,v)| = |u| \cdot |v| \cdot \sin\alpha$$

Zavedeme orientovaný úhel $\measuredangle(u,v) \in (-\pi, \pi]$:

$$\cos\alpha = \frac{\langle u,v \rangle}{|u| \cdot |v|} \qquad \sin\alpha = \frac{\mathrm{Vol}(u,v)}{|u| \cdot |v|}$$

$|v| = |u|$, $\measuredangle(u,v) = +90°$

$\Leftrightarrow$ násobení i = rotace o $+90°$

$\Rightarrow$ vektorový prostor nad $\mathbb{C}$: $(a + i \cdot b)\, u = a u + b v$

Naopak násobení komplexními čísly dá orientaci + sk. součin až na násobek

$$\measuredangle(u,v) = \arg\left(\frac{v}{u}\right) \qquad \frac{|v|}{|u|} = \left|\frac{v}{u}\right| = \text{relativní velikost}$$