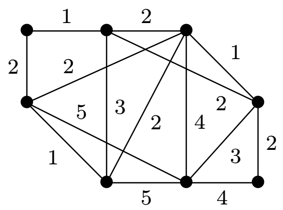
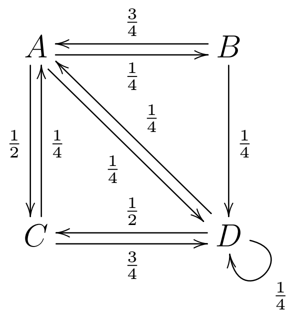
Teorie grafů – podzim 2018 – 1. termín

1. (10 bodů) Nalezněte všechny kostry nejmenší váhy v grafu

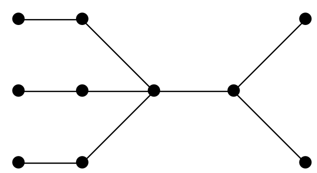


2. (10 bodů) Následující graf vyjadřuje pravděpodobnost přechodu systému mezi stavy A, B, C a D během jednoho kroku. Určete, jaká je pravděpodobnost, že se systém po čtyřech krocích bude nacházet ve stavu A, začíná-li v každém stavu se stejnou pravděpodobností.



3. (5 bodů) Dejte příklad rovinného bipartitního grafu G s devíti vrcholy, který splňuje $\kappa'(G) = 3$ a $\chi'(G) = 5$. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

4. (5 bodů) Dejte příklad eulerovského grafu, který má následující blokový strom. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.



.

5. (5 bodů) Dejte příklad 2-souvislého grafu s pěti vrcholy, který není hamiltonovský. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

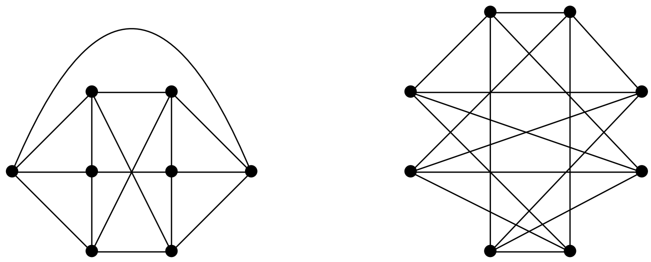
6. (10 bodů) Určete, pro která přirozená čísla x a y je posloupnost

$$(2, 3, 4, 4, 5, x, 7, y, y)$$

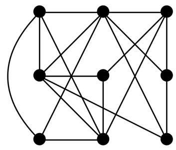
skórem nějakého grafu, a svoje rozhodnutí zdůvodněte. Pro všechny takové hodnoty x a y dejte příklad grafu s tímto skóre.

7. (10 bodů) Najděte všechny vzájemně neizomorfní grafy G se sedmi vrcholy, které splňují $\chi(G) > \chi'(G)$.

8. (8 bodů) Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.



9. (7 bodů) Rozhodněte, zda následující graf je rovinný. Pokud rovinný je, doplňte jej na maximální rovinný graf. Pokud rovinný není, svoje rozhodnutí zdůvodněte.



10. (10 bodů) Nechť $n \geq 2$ je přirozené číslo a nechť G je obyčejný graf s n^2 vrcholy $u_{i,j}$, pro $i, j = 1, \ldots, n$, a s hranami $u_{i,j}u_{i,j+1}$ a $u_{i,n}u_{i,1}$, pro $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n-1$, a $u_{i,j}u_{i+1,j}$ a $u_{n,j}u_{1,j}$, pro $i = 1, \ldots, n-1$, $j = 1, \ldots, n$. Určete hranovou a vrcholovou souvislost G, jeho hranové a vrcholové chromatické číslo a zda je G eulerovský či hamiltonovský.

11. (5 bodů) Definujte obyčejný graf a izomorfismus obyčejných grafů.

12. (5 bodů) Formulujte Tutteho větu o perfektním párování a vysvětlete v ní použité pojmy.

13. (10 bodů) Pro každé přirozené číslo n dokažte, že pokud v každém podgrafu grafu $G = (V, E)$ existuje vrchol stupně nejvýše $2^n - 1$, tak existují podmnožiny $E_1, \ldots, E_n \subseteq E$ takové, že $E = E_1 \cup \cdots \cup E_n$ a grafy (V, E_1), …, (V, E_n) jsou bipartitní.