

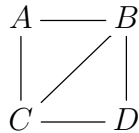
Teorie grafů – podzim 2020 – 3. termín

1. (10 bodů) Závodu, který je určen pro jednotlivce a smíšené páry, se hodlá zúčastnit devět chlapců označených písmeny A až I a devět dívek označených písmeny α až ι . Následující tabulka udává pro všechny chlapce, se kterými dívkami mohou vytvořit tým.

A	δ, ζ	B	δ, ζ, ι	C	$\alpha, \beta, \varepsilon, \eta, \vartheta$	D	α, ι	E	δ, ι	F	$\gamma, \varepsilon, \vartheta, \iota$
G	α, δ, ι	H	δ, ζ	I	$\beta, \gamma, \eta, \vartheta, \iota$						

Aktuálně platí nařízení dovolující pořádat pouze soutěže, kterých se účastní nejvýše deset týmů, bez ohledu na počet členů týmu. Rozhodněte, zda je možné, aby se při dodržení tohoto nařízení závodu zúčastnili všichni zájemci. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.

2. (10 bodů) Určete počet uzavřených sledů délky 8 v grafu

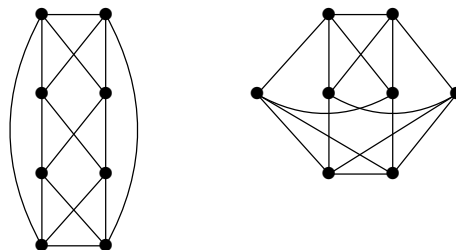


3. (5 bodů) Dejte příklad souvislého grafu s devíti vrcholy, který má stejně bloků jako koster. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.
4. (5 bodů) Dejte příklad 3-souvislého grafu G se šesti vrcholy, který splňuje $\chi(G) = 3$ a $\chi'(G) = 5$. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.
5. (5 bodů) Dejte příklad grafu G se sedmi vrcholy, který není hamiltonovský a splňuje $\kappa(G) = 2$ a $\kappa'(G) = 3$. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.
6. (10 bodů) Určete, pro která přirozená čísla x a y je posloupnost

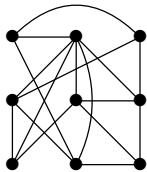
$$(1, 1, 1, 1, 2, x, 4, y, x + 3)$$

skórem nějakého grafu, a svoje rozhodnutí zdůvodněte. Pro všechny takové hodnoty x a y dejte příklad grafu s tímto skóre.

7. (10 bodů) Najděte všechny vzájemně neizomorfní grafy G s osmi vrcholy, které splňují $\kappa'(G) = \kappa(G) + 2$.
8. (8 bodů) Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.



9. (7 bodů) Rozhodněte, zda následující graf je rovinný. Pokud rovinný je, doplňte jej na maximální rovinný graf. Pokud rovinný není, svoje rozhodnutí zdůvodněte.



10. (10 bodů) Nechť $n \geq 3$ je přirozené číslo a G je obyčejný graf tvořený dvěma disjunktními cykly délky n s vrcholy u_1, \dots, u_n a v_1, \dots, v_n (vrcholy leží na cyklech v uvedeném pořadí). Tyto cykly jsou spolu spojeny hranami $u_i v_{i-1}$ a $u_i v_{i+1}$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$ (přitom v_0 značí vrchol v_n a v_{n+1} značí vrchol v_1). Určete hranovou a vrcholovou souvislost G , jeho hranové a vrcholové chromatické číslo a zda je G eulerovský či hamiltonovský.
11. (5 bodů) Definujte střed grafu.
12. (5 bodů) Formulujte Ramseyho větu pro k barev.
13. (10 bodů) Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n platí, že má-li každý vrchol obyčejného grafu G o $2n$ vrcholech stupeň alespoň n , tak $\kappa'(G)$ je rovno nejmenšímu stupni vrcholu v G .