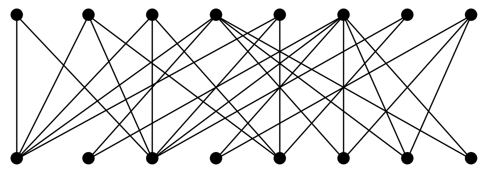
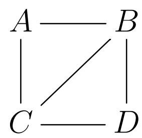
Teorie grafů – podzim 2022 – 2. termín

1. (10 bodů) Nalezněte největší párování v následujícím grafu. Svoje tvrzení zdůvodněte.



2. (10 bodů) Určete počet uzavřených sledů délky 8 v grafu



3. (5 bodů) Dejte příklad netriviálního regulárního bipartitního rovinného eulerovského grafu, který není 2-souvislý. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

4. (5 bodů) Dejte příklad ohodnoceného orientovaného grafu G, který neobsahuje orientovanou kružnici záporné váhy, a jeho vrcholu v takového, že Dijkstrův algoritmus správně určí nejmenší váhu cesty z v právě pro polovinu vrcholů grafu G. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

5. (5 bodů) Dejte příklad obyčejného grafu G se šesti vrcholy, který splňuje rovnosti $\chi(G) = \chi'(G) = \kappa'(G) = 3$. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

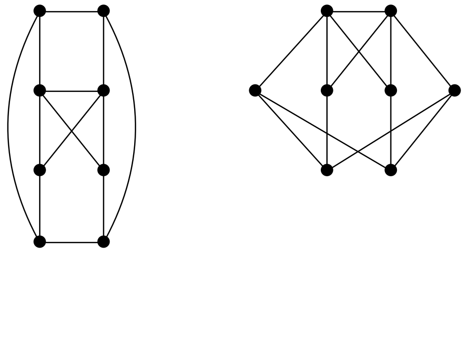
6. (10 bodů) Určete, pro která přirozená čísla x a y je posloupnost

$$(1, 1, 1, x, 2, 4, 4, y)$$

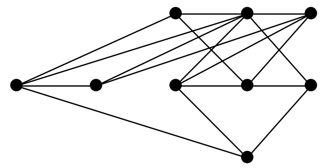
skórem nějakého grafu, a svoje rozhodnutí zdůvodněte. Pro všechny takové hodnoty x a y dejte příklad grafu s tímto skóre.

7. (10 bodů) Najděte všechny vzájemně neizomorfní hranově 2-souvislé obyčejné grafy, které mají právě šestnáct koster.

8. (8 bodů) Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.



9. (7 bodů) Rozhodněte, zda následující graf je rovinný. Pokud rovinný je, doplňte jej na maximální rovinný graf. Pokud rovinný není, svoje rozhodnutí zdůvodněte.



10. (10 bodů) Nechť n je kladné celé číslo a nechť G je obyčejný graf s $5n$ vrcholy s_i, t_i, u_i, v_i a w_i, pro $i = 1, \ldots, n$, přičemž pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$ indukují vrcholy t_i, u_i, v_i a w_i v G úplný podgraf K_4 a dále má G právě hrany $s_i t_i$, $s_i u_i$, $v_i s_{i+1}$ a $w_i s_{i+1}$, kde s_{n+1} značí vrchol s_1. Určete hranovou a vrcholovou souvislost G, jeho hranové a vrcholové chromatické číslo a zda je G eulerovský či hamiltonovský.

11. (5 bodů) Definujte síť a tok v síti.

12. (5 bodů) Formulujte Eulerův vztah pro graf s k komponentami.

13. (10 bodů) Dokažte, že každý 3-regulární graf, který lze (až na permutaci barev) právě jedním způsobem řádně hranově obarvit třemi barvami, je hamiltonovský.