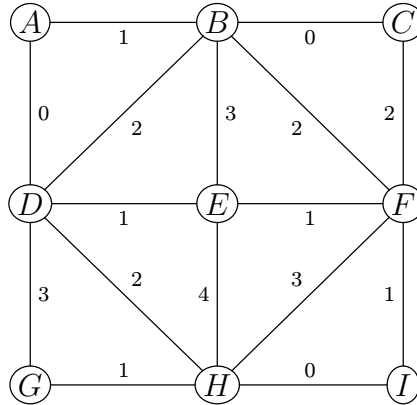


Teorie grafů – podzim 2022 – 5. termín

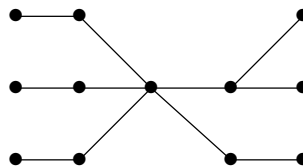
1. (10 bodů) Na následujícím grafu předvedte běh Dijkstrova algoritmu s počátečním vrcholem E . Vyznačte algoritmem získaný strom nejkratších cest.



2. (10 bodů) Následující tabulka vyjadřuje odhad pravděpodobnosti, která strana se dostane k moci v následujících volbách, v závislosti na tom, kdo vládl v posledních dvou volebních obdobích. Určete, s jakou pravděpodobností bude po proběhnutí čtyř voleb u moci levice, jestliže právě vládne pravice a v minulém volebním období vládla levice.

předchozí vláda	současná vláda	zvítězí levice	zvítězí pravice
levice	levice	1/6	5/6
levice	pravice	2/3	1/3
pravice	pravice	5/6	1/6
pravice	levice	1/2	1/2

3. (5 bodů) Dejte příklad obyčejného grafu se šesti vrcholy a jeho dvou vrcholů u a v takových, že počet sledů délky 4 z u do v je vyšší než počet tahů délky 4 z u do v , a ten je vyšší než počet cest délky 4 z u do v . Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.
4. (5 bodů) Dejte příklad obyčejného grafu G s deseti vrcholy, který neobsahuje vrchol stupně 3 a splňuje $\kappa(G) = 2$ a $\kappa'(G) = 3$. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.
5. (5 bodů) Dejte příklad souvislého bipartitního grafu s 11 vrcholy a 11 hranami, který má následující blokovaný strom. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.



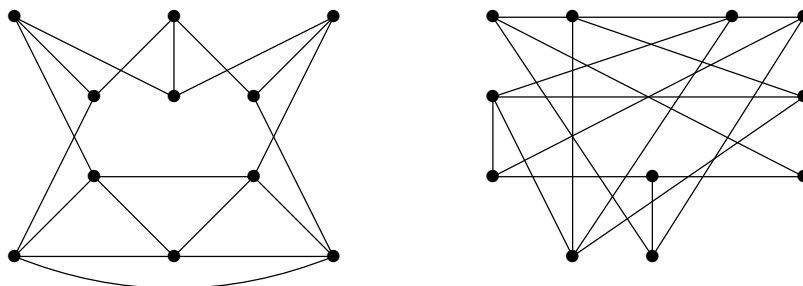
6. (10 bodů) Určete, pro která přirozená čísla x a y je posloupnost

$$(1, 1, 1, 1, 2, x, 4, y, x + 4)$$

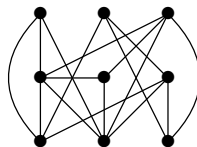
skórem nějakého grafu, a svoje rozhodnutí zdůvodněte. Pro všechny takové hodnoty x a y dejte příklad grafu s tímto skóre.

7. (10 bodů) Najděte všechny vzájemně neizomorfní 2-souvislé grafy G se sedmi vrcholy, které neobsahují podgraf izomorfní grafu K_3 a splňují $\chi(G) = 3$.

8. (8 bodů) Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.



9. (7 bodů) Rozhodněte, zda je následující graf rovinný. Pokud rovinný je, doplňte jej na maximální rovinný graf. Pokud rovinný není, svoje rozhodnutí zdůvodněte.



10. (10 bodů) Nechť $n \geq 3$ je celé číslo a G je obyčejný graf sestávající ze dvou kružnic s vrcholy v_1, \dots, v_n a w_1, \dots, w_n (vrcholy leží na kružnicích v uvedeném pořadí) a dvou vrcholů v a w , přičemž G dále obsahuje právě hrany vw, vv_i, ww_i, v_iw_i , pro $i = 1, \dots, n$. Určete hranovou a vrcholovou souvislost grafu G , jeho hranové a vrcholové chromatické číslo a zda je G eulerovský nebo hamiltonovský.

11. (5 bodů) Definujte rezervní polocestu a její rezervu.

12. (5 bodů) Formulujte větu o největších párováních a vrcholových pokrytích v bipartitních grafech a vysvětlete v ní použité pojmy.

13. (10 bodů) Dokažte, že pro každý 3-regulární graf G splňující $\kappa(G) = 1$ platí $\chi'(G) = 4$.