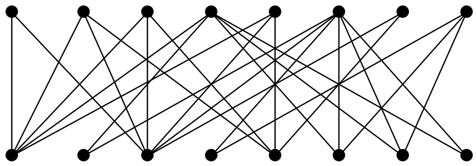
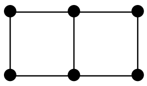
Teorie grafů – podzim 2023 – 2. termín

1. (10 bodů) Nalezněte největší párování v následujícím grafu. Svoje tvrzení zdůvodněte.



2. (10 bodů) Určete chromatický polynom grafu



3. (5 bodů) Dejte příklad 3-souvislého bipartitního rovinného eulerovského obyčejného grafu s 12 vrcholy. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

4. (5 bodů) Dejte příklad obyčejného grafu s 10 vrcholy, který má právě tři izomorfismy na sebe. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

5. (5 bodů) Dejte příklad obyčejného grafu G s osmi vrcholy, který má právě dvě perfektní párování a splňuje rovnosti $\kappa(G) = 1$, $\kappa'(G) = 2$ a $\chi'(G) = 7$. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

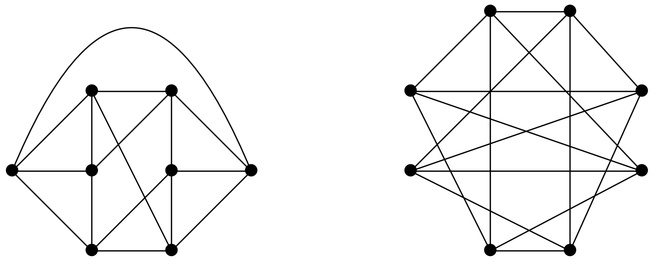
6. (10 bodů) Určete, pro která přirozená čísla x a y je posloupnost

$$(2, 3, 4, 4, 5, x, 7, y, y)$$

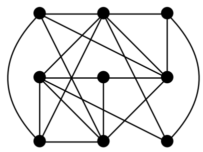
skórem nějakého obyčejného grafu, a svoje rozhodnutí zdůvodněte. Pro všechny takové hodnoty x a y dejte příklad obyčejného grafu s tímto skóre.

7. (10 bodů) Najděte všechny vzájemně neizomorfní souvislé obyčejné grafy G s osmi hranami, které mají právě 16 koster.

8. (8 bodů) Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.



9. **(7 bodů)** Rozhodněte, zda následující graf je rovinný. Pokud rovinný je, doplňte jej na maximální rovinný graf. Pokud rovinný není, svoje rozhodnutí zdůvodněte.



10. **(10 bodů)** Nechť $n \geq 3$ je přirozené číslo a G je obyčejný graf s $2n$ vrcholy u_i, v_i, pro $i = 1, \ldots, n$, a hranami $u_i v_i$, $u_i u_{i+1}$, $u_i v_{i+1}$, $v_i u_{i+1}$ a $v_i v_{i+1}$, pro $i = 1, \ldots, n$, kde $u_{n+1} = u_1$ a $v_{n+1} = v_1$. Určete hranovou a vrcholovou souvislost G, jeho hranové a vrcholové chromatické číslo a zda je G eulerovský nebo hamiltonovský.

11. **(5 bodů)** Definujte blokový strom souvislého grafu, včetně v definici použitých pojmů.

12. **(5 bodů)** Formulujte věty o struktuře 2-souvislých a 3-souvislých grafů.

13. **(10 bodů)** Pro každé přirozené číslo $k \geq 2$ dokažte, že je-li G neúplný graf, který splňuje $\kappa(G) \leq k - 2$, a α řádné k-obarvení grafu G, potom existuje řádné k-obarvení grafu G, které se od α liší nejen permutací barev.