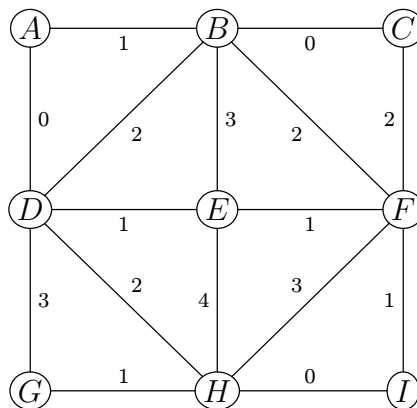


## Teorie grafů – podzim 2023 – 3. termín

1. (10 bodů) Následující tabulka vyjadřuje odhad pravděpodobnosti, která strana se dostane k moci v následujících volbách, v závislosti na tom, kdo vládl v posledních dvou volebních obdobích. Určete, s jakou pravděpodobností bude po proběhnutí čtyř voleb u moci levice, jestliže právě vládne pravice a v minulém volebním období vládla levice.

předchozí vláda	současná vláda	zvítězí levice	zvítězí pravice
levice	levice	$1/6$	$5/6$
levice	pravice	$2/3$	$1/3$
pravice	pravice	$5/6$	$1/6$
pravice	levice	$1/2$	$1/2$

2. (10 bodů) Na následujícím grafu předvedte běh Dijkstrova algoritmu s počátečním vrcholem  $E$ . Vyznačte algoritmem získaný strom nejkratších cest.



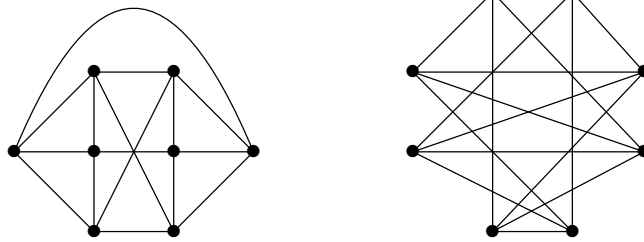
3. (5 bodů) Dejte příklad 2-souvislého obyčejného grafu s osmi vrcholy a 13 hranami takového, že po odstranění libovolné hrany zůstane hranově 2-souvislý, ale po odstranění některé hrany přestane být 2-souvislý. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.
4. (5 bodů) Dejte příklad eulerovského rovinného obyčejného grafu se 14 vrcholy, který nemá čtyři vrcholy stejného stupně. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.
5. (5 bodů) Dejte příklad 3-souvislého obyčejného grafu  $G = (V, E)$  s osmi vrcholy, který má jediný izomorfismus na sebe různý od identity a tento izomorfismus  $\varphi$  splňuje  $\varphi(v) \neq v$  pro všechny vrcholy  $v \in V$ . Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

6. (10 bodů) Určete, pro která přirozená čísla  $x$  a  $y$  je posloupnost

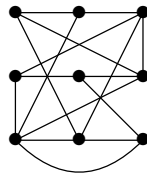
$$(1, 1, 1, x, 4, y, y, y + 1)$$

skórem nějakého obyčejného grafu, a svoje rozhodnutí zdůvodněte. Pro všechny takové hodnoty  $x$  a  $y$  dejte příklad obyčejného grafu s tímto skóre.

7. (10 bodů) Najděte všechny vzájemně neizomorfní obyčejné grafy  $G$  se šesti vrcholy, které splňují rovnosti  $\kappa(G) = 1$  a  $\chi(G) = \chi'(G) = 3$ .
8. (8 bodů) Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.



9. (7 bodů) Rozhodněte, zda následující graf je rovinný. Pokud rovinný je, doplňte jej na maximální rovinný graf. Pokud rovinný není, svoje rozhodnutí zdůvodněte.



10. (10 bodů) Nechť  $n \geq 3$  je přirozené číslo a  $G$  je obyčejný graf s  $3n$  vrcholy  $u_i, v_i, w_i$ , pro  $i = 1, \dots, n$ , a hranami  $u_i v_i, v_i w_i, u_i u_{i+1}, u_i v_{i+1}, v_i v_{i+1}, w_i v_{i+1}$  a  $w_i w_{i+1}$ , pro  $i = 1, \dots, n$ , kde  $u_{n+1} = u_1, v_{n+1} = v_1$  a  $w_{n+1} = w_1$ . Určete hranovou a vrcholovou souvislost  $G$ , jeho hranové a vrcholové chromatické číslo a zda je  $G$  eulerovský nebo hamiltonovský.
11. (5 bodů) Definujte blokový strom souvislého grafu, včetně v definici použitých pojmů.
12. (5 bodů) Formulujte vzorec pro výpočet největší velikosti párování a podmínku charakterizující existenci perfektního párování v obyčejném grafu.
13. (10 bodů) Dokažte, že každý 2-souvislý graf má alespoň tolik koster jako hran.