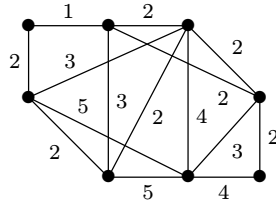
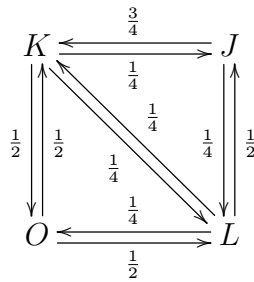


Teorie grafů – podzim 2023 – 4. termín

1. (10 bodů) Nalezněte všechny kostry nejmenší váhy v grafu



2. (10 bodů) Následující graf vyjadřuje pravděpodobnost, do které z místností kuchyň, jídelna, obývací a ložnice se nehlídané dítě přesune během čtvrt minuty. Určete, ve které místnosti je třeba dítě opustit, chceme-li maximalizovat pravděpodobnost, že když se je po minutě vydáme hledat, najdeme je nejpozději ve druhé prohledávané místnosti. (Jako první prohledáváme samozřejmě místnosti, kde se dítě nachází s největší pravděpodobností.)

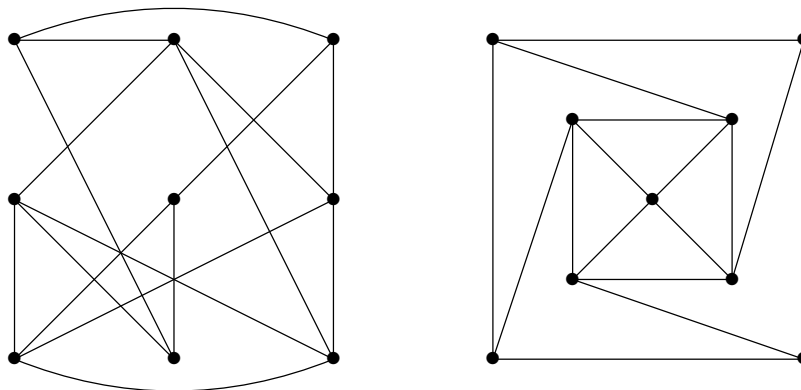


3. (5 bodů) Dejte příklad 4-souvislého obyčejného grafu s osmi vrcholy, který nemá perfektní párování. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.
4. (5 bodů) Dejte příklad obyčejného grafu G se 14 vrcholy, který splňuje rovnosti $\kappa(G) = 1$ a $\kappa'(G) = 2$ a jehož blokový strom má jediný izomorfismus na sebe. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.
5. (5 bodů) Dejte příklad 2-souvislého obyčejného grafu se šesti vrcholy a jeho dvou vrcholů u a v takových, že existuje právě deset cest z u do v . Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.
6. (10 bodů) Určete, pro která přirozená čísla x a y je posloupnost

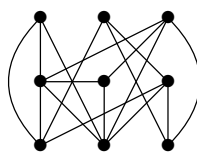
$$(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, x, y)$$

skórem nějakého obyčejného grafu, a svoje rozhodnutí zdůvodněte. Pro všechny takové hodnoty x a y dejte příklad obyčejného grafu s tímto skóre.

7. (10 bodů) Najděte všechny vzájemně neizomorfní obyčejné grafy $G = (V, E)$ s osmi vrcholy takové, že pro každou dvojici vrcholů $u, v \in V$ existuje izomorfismus φ grafu G na sebe splňující $\varphi(u) = v$.
8. (8 bodů) Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.



9. (7 bodů) Rozhodněte, zda následující graf je rovinný. Pokud rovinný je, doplňte jej na maximální rovinný graf. Pokud rovinný není, svoje rozhodnutí zdůvodněte.



10. (10 bodů) Nechť $n \geq 3$ je přirozené číslo a G je obyčejný graf s $3n$ vrcholy u_i, v_i, w_i , pro $i = 1, \dots, n$, a hranami $u_i v_i, v_i w_i, u_i u_{i+1}, u_i w_{i+1}, v_i v_{i+1}, w_i u_{i+1}$ a $w_i w_{i+1}$, pro $i = 1, \dots, n$, kde $u_{n+1} = u_1, v_{n+1} = v_1$ a $w_{n+1} = w_1$. Určete hranovou a vrcholovou souvislost G , jeho hranové a vrcholové chromatické číslo a zda je G eulerovský nebo hamiltonovský.
11. (5 bodů) Definujte κ a κ' a vysvětlete v definicích použité pojmy.
12. (5 bodů) Formulujte Ramseyho větu pro k barev.
13. (10 bodů) Dokažte, že obsahuje-li 3-souvislý graf kružnici liché délky, potom obsahuje takové kružnice aspoň čtyři.