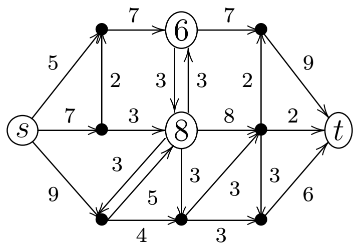
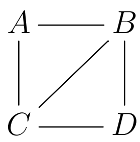
Teorie grafů – podzim 2023 – 5. termín

1. (10 bodů) Určete největší velikost toku v následující síti s danými kapacitami hran a dvou vrcholů a svoje rozhodnutí zdůvodněte.



2. (10 bodů) Určete počet uzavřených sledů délky 8 v grafu



3. (5 bodů) Dejte příklad obyčejného grafu G, který má pět vrcholů a splňuje podmínky $\kappa(G) = \chi'(G) \neq 0$. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

4. (5 bodů) Dejte příklad obyčejného grafu G s osmi vrcholy, který splňuje $\kappa(G) = 1$ a $\kappa'(G) = 2$ a minimum ze stupňů jeho vrcholů je 3. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

5. (5 bodů) Dejte příklad souvislého obyčejného grafu G se šesti vrcholy a jeho dvou vrcholů u a v takových, že v G existuje právě jedna cesta délky čtyři z u do v a právě tři tahy délky čtyři z u do v. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

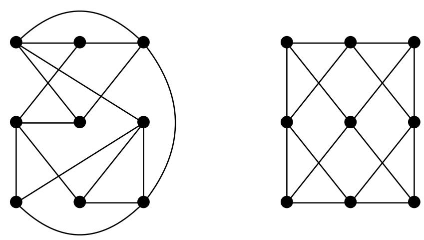
6. (10 bodů) Určete, pro která přirozená čísla x a y je posloupnost

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1, x, x + 2, 5, y)$$

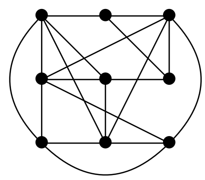
skórem nějakého obyčejného grafu, a svoje rozhodnutí zdůvodněte. Pro všechny takové hodnoty x a y dejte příklad obyčejného grafu s tímto skóre.

7. (10 bodů) Najděte všechny vzájemně neizomorfní 2-souvislé grafy se sedmi vrcholy, které přestanou být 2-souvislé po odebrání libovolné hrany.

8. (8 bodů) Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.



9. **(7 bodů)** Rozhodněte, zda následující graf je rovinný. Pokud rovinný je, doplňte jej na maximální rovinný graf. Pokud rovinný není, svoje rozhodnutí zdůvodněte.



10. **(10 bodů)** Nechť $n \geq 1$ je přirozené číslo a G je obyčejný graf s vrcholy

$$u_1, \ldots, u_{n+1}, v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_{n+1}$$

a hranami

$$\begin{array}{ll} u_i u_j,\ w_i w_j & \text{pro } i, j \in \{1, \ldots, n+1\},\ i \neq j, \\ u_i v_j,\ w_i v_j & \text{pro } i \in \{1, \ldots, n+1\},\ j \in \{1, \ldots, n\}. \end{array}$$

Určete hranovou a vrcholovou souvislost G, jeho hranové a vrcholové chromatické číslo a zda je G eulerovský nebo hamiltonovský.

11. **(5 bodů)** Definujte blokový strom souvislého grafu, včetně v definici použitých pojmů.

12. **(5 bodů)** Formulujte Eulerův vztah.

13. **(10 bodů)** Pro každé přirozené číslo n dokažte, že pokud v každém podgrafu grafu $G = (V, E)$ existuje vrchol stupně menšího než 2^n, tak existují podmnožiny $E_1, \ldots, E_n \subseteq E$ takové, že $E = E_1 \cup \cdots \cup E_n$ a grafy (V, E_1), …, (V, E_n) jsou bipartitní.