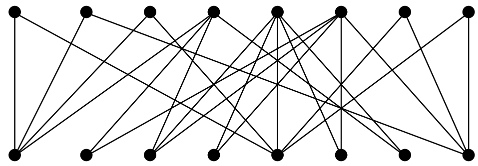
Teorie grafů – podzim 2024 – 1. termín

1. **(10 bodů)** Nalezněte největší párování v následujícím bipartitním grafu a svoje tvrzení zdůvodněte.



2. **(10 bodů)** Když se v naší škole porouchá kotel, je vždy následující den provedena oprava, přičemž s pravděpodobností $1/2$ se kotel porouchá v den následující po opravě znovu a pokud ne, tak se poté porouchá každý další den se stejnou pravděpodobností $1/4$. V první den školního roku proběhla oprava kotle. Určete, s jakou pravděpodobností bude provedena oprava kotle devátý den školního roku. (Výsledný výraz obsahující několik součinů víceciferných čísel vyhodnocovat nemusíte.)

3. **(5 bodů)** Dejte příklad 3-regulárního obyčejného grafu G s nejvýše deseti vrcholy, který splňuje $\kappa(G) = 2$. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

4. **(5 bodů)** Dejte příklad hamiltonovského a eulerovského obyčejného grafu se šesti vrcholy a jeho regulárního podgrafu, který má také šest vrcholů, je eulerovský, ale není hamiltonovský. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

5. **(5 bodů)** Dejte příklad souvislého bipartitního grafu s osmi vrcholy, který není rovinný, ale odebráním kterékoli hrany z něj vznikne rovinný graf. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

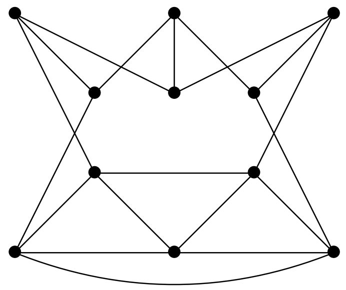
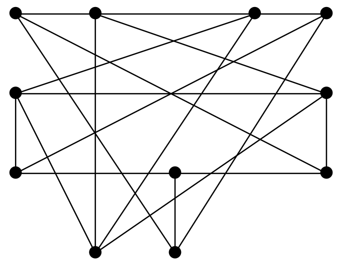
6. **(10 bodů)** Určete, pro která přirozená čísla x a y je posloupnost

$$(1, 1, 1, x, x, x, 5, y)$$

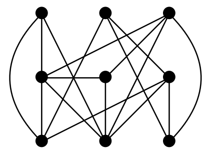
skórem nějakého grafu, a svoje rozhodnutí zdůvodněte. Pro všechny takové hodnoty x a y dejte příklad grafu s tímto skóre.

7. **(10 bodů)** Najděte všechny vzájemně neizomorfní hranově 2-souvislé grafy G, které mají právě 64 koster a přitom neobsahují kružnici délky větší než 4 ani podgraf izomorfní grafu $K_{2,3}$.

8. (8 bodů) Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.

9. (7 bodů) Rozhodněte, zda následující graf je rovinný. Pokud rovinný je, doplňte jej na maximální rovinný graf. Pokud rovinný není, svoje rozhodnutí zdůvodněte.



10. (10 bodů) Nechť $n \geq 2$ je celé číslo a G je obyčejný graf s $3n - 3$ vrcholy sestávající ze tří podgrafů izomorfních grafu K_n, přičemž každé dva z těchto podgrafů mají společný právě jeden vrchol. Určete hranovou a vrcholovou souvislost G, jeho hranové a vrcholové chromatické číslo, zda je G eulerovský a zda je hamiltonovský.

11. (5 bodů) Definujte tok v síti a jeho velikost.

12. (5 bodů) Formulujte vzorec pro výpočet největší velikosti párování a podmínku charakterizující existenci perfektního párování v obyčejném grafu.

13. (10 bodů) Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo k takové, že každá posloupnost k transformací množiny $\{1, \ldots, n\}$ obsahuje několik po sobě jdoucích transformací, jejichž kompozice f (v pořadí určeném posloupností) splňuje $f(f(1)) = f(1)$.