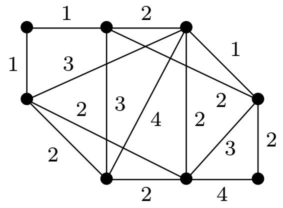
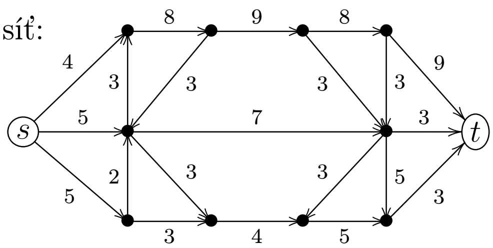
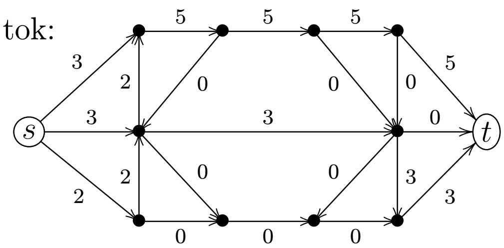
Teorie grafů – podzim 2024 – 2. termín

1. (10 bodů) Nalezněte všechny kostry nejmenší váhy v grafu



2. (10 bodů) Pomocí algoritmu Edmondse a Karpa upravte následující tok na tok největší velikosti.

síť: 

tok: 

3. (5 bodů) Dejte příklad 5-regulárního obyčejného grafu s deseti vrcholy, který nemá perfektní párování. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

4. (5 bodů) Dejte příklad 3-regulárního obyčejného grafu G, který splňuje $\chi'(G) = 4$ a jehož střed sestává z jediného vrcholu. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

5. (5 bodů) Dejte příklad obyčejného grafu s devíti vrcholy, který má právě 48 izomorfismů na sebe. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

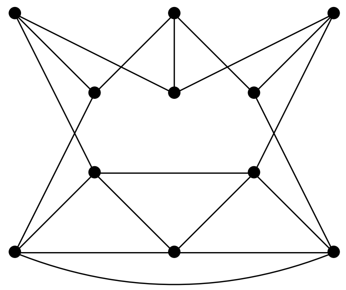
6. (10 bodů) Určete, pro která přirozená čísla x a y je posloupnost

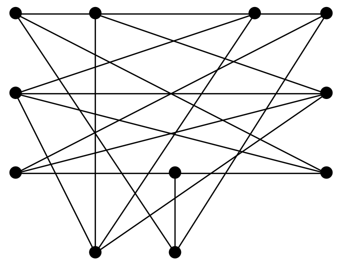
$$(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, x, y)$$

skórem nějakého obyčejného grafu, a svoje rozhodnutí zdůvodněte. Pro všechny takové hodnoty x a y dejte příklad grafu s tímto skóre.

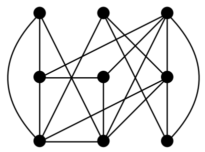
7. (10 bodů) Najděte všechny vzájemně neizomorfní obyčejné grafy G s osmi vrcholy, které splňují $\kappa'(G) = \kappa(G) + 2$.

8. **(8 bodů)** Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.





9. **(7 bodů)** Rozhodněte, zda následující graf je rovinný. Pokud rovinný je, doplňte jej na maximální rovinný graf. Pokud rovinný není, svoje rozhodnutí zdůvodněte.



10. **(10 bodů)** Nechť $n \geq 0$ je celé číslo a G je obyčejný graf tvořený $n+1$ disjunktními cestami délky n a dvěma dalšími vrcholy, které jsou oba spojeny hranami právě se všemi vrcholy těchto $n+1$ cest. Určete hranovou a vrcholovou souvislost G, jeho hranové a vrcholové chromatické číslo, zda je G eulerovský a zda je hamiltonovský.

11. **(5 bodů)** Definujte pojmy izomorfismu grafů a podgrafu.

12. **(5 bodů)** Formulujte Eulerův vztah pro grafy s více komponentami a vysvětlete v něm použité pojmy.

13. **(10 bodů)** Dokažte, že pro přirozená čísla m a n a graf $G = (V, E)$ existuje rozklad množiny hran $E = E_1 \cup E_2$ takový, že $\chi(V, E_1) \leq m$ a $\chi(V, E_2) \leq n$, právě tehdy, když $\chi(G) \leq m \cdot n$.