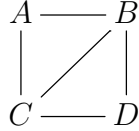
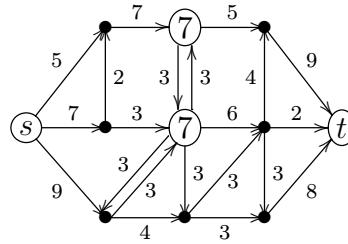


## Teorie grafů – podzim 2024 – 3. termín

1. (10 bodů) Určete počet uzavřených sledů délky 8 v grafu



2. (10 bodů) Určete největší velikost toku v následující síti s danými kapacitami hran a dvou vrcholů a svoje rozhodnutí zdůvodněte.

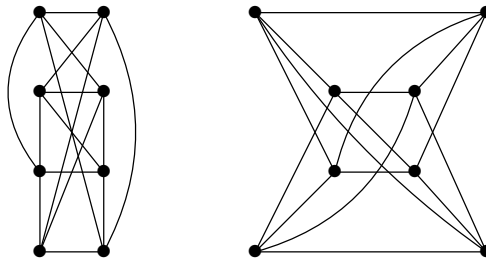


3. (5 bodů) Dejte příklad neúplného regulárního rovinného obyčejného grafu, který přidáním libovolné hrany přestane být rovinný. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.
4. (5 bodů) Dejte příklad souvislého obyčejného grafu s deseti vrcholy, který má právě čtyři perfektní párování. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.
5. (5 bodů) Dejte příklad obyčejného grafu  $G$  s 12 vrcholy, který není eulerovský a splňuje  $\chi(G) = 3$  a  $\kappa(G) = 8$ . Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.
6. (10 bodů) Určete, pro která přirozená čísla  $x$  a  $y$  je posloupnost

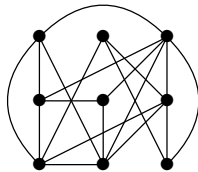
$$(1, 1, 1, 1, 1, 1, x, 4, y, 2x + 1)$$

skórem nějakého obyčejného grafu, a svoje rozhodnutí zdůvodněte. Pro všechny takové hodnoty  $x$  a  $y$  dejte příklad grafu s tímto skórem.

7. (10 bodů) Najděte všechny vzájemně neizomorfní souvislé obyčejné grafy se šesti vrcholy, které mají právě jeden most a všechny jejich hranově 2-souvislé podgrafy jsou 2-souvislé.
8. (8 bodů) Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.



9. (7 bodů) Rozhodněte, zda následující graf je rovinný. Pokud rovinný je, doplňte jej na maximální rovinný graf. Pokud rovinný není, svoje rozhodnutí zdůvodněte.



10. (10 bodů) Nechť  $n \geq 3$  je přirozené číslo a  $G$  je obyčejný graf s vrcholy  $u_{i,j}$ , pro  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , a hranami  $u_{i,j}u_{i+1,j}$  a  $u_{i,j}u_{k,j+1}$ , pro všechna  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ , kde  $u_{n+1,j}$  značí vrchol  $u_{1,j}$  a  $u_{k,n+1}$  vrchol  $u_{k,1}$ . Určete hranovou a vrcholovou souvislost  $G$ , jeho hranové a vrcholové chromatické číslo, zda je  $G$  eulerovský a zda je hamiltonovský.
11. (5 bodů) Definujte pojem vzdálenosti v obyčejném grafu a střed grafu.
12. (5 bodů) Formulujte Eulerův vztah pro grafy s více komponentami a vysvětlete v něm použité pojmy.
13. (10 bodů) Dokažte, že pokud obyčejný graf  $G$  neobsahuje vrchol stupně alespoň 4, tak platí rovnost  $\kappa(G) = \kappa'(G)$ .