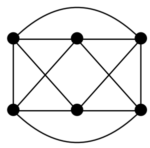
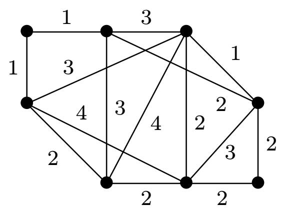
Teorie grafů – podzim 2024 – 5. termín

1. (10 bodů) Určete chromatický polynom grafu



2. (10 bodů) Nalezněte všechny kostry nejmenší váhy v grafu



3. (5 bodů) Dejte příklad souvislého grafu s dvanácti vrcholy takového, že jeho blokový strom má perfektní párování. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

4. (5 bodů) Dejte příklad obyčejného grafu G s devíti vrcholy, který je eulerovský a splňuje $\kappa(G) = \chi(G) = 2$. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

5. (5 bodů) Dejte příklad ohodnoceného orientovaného grafu G a jeho vrcholu v takového, že Dijkstrův algoritmus při spuštění na grafu G s počátečním vrcholem v může dát správný i chybný výsledek. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

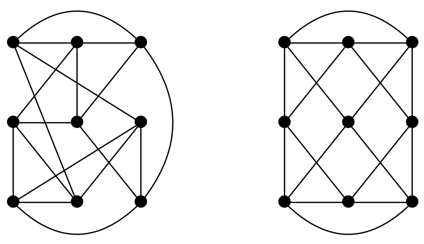
6. (10 bodů) Určete, pro která přirozená čísla x a y je posloupnost

$$(1, 1, 2, x, y, 4, 4, x + y, x + y)$$

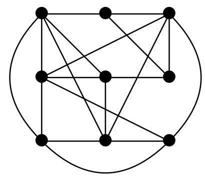
skórem nějakého obyčejného grafu, a svoje rozhodnutí zdůvodněte. Pro všechny takové hodnoty x a y dejte příklad grafu s tímto skóre.

7. (10 bodů) Najděte všechny vzájemně neizomorfní grafy G se sedmi vrcholy, které splňují $\chi(G) > \chi'(G)$.

8. (8 bodů) Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.



9. (7 bodů) Rozhodněte, zda následující graf je rovinný. Pokud rovinný je, doplňte jej na maximální rovinný graf. Pokud rovinný není, svoje rozhodnutí zdůvodněte.



10. (10 bodů) Nechť $n \geq 1$ je přirozené číslo a G je obyčejný graf s $3n$ vrcholy u_i, v_i a w_i, pro $i = 1, \ldots, n$, a s množinou hran

$$E = \{\, u_i u_j, v_i v_j, w_i w_j, u_i v_j, v_i w_j \mid i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j \,\}.$$

Určete hranovou a vrcholovou souvislost G, jeho hranové a vrcholové chromatické číslo, zda je G eulerovský a zda je hamiltonovský.

11. (5 bodů) Definujte rezervní polocestu a její rezervu.

12. (5 bodů) Formulujte Ramseyho větu pro k barev.

13. (10 bodů) Dokažte, že každý 2-souvislý graf o n vrcholech, který není izomorfní grafu C_n, má alespoň $3n - 4$ koster.