M5858

Cvičení 5

Systémy lineárních rovnic 1. řádu

$\boxed{1.}$ Vyřeš systémy rovnic:

a) $$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 - 2x_2 \\ x_2' &= -3x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2 \\ x_2' &= -x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1' &= -2x_1 + 5x_2 - 5x_3 \\ x_2' &= -x_2 + 2x_3 \\ x_3' &= x_1 - 3x_2 + 4x_3 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2' &= -x_1 - x_2 + x_3 \\ x_3' &= x_1 + x_2 + x_3 \end{aligned}$$

e) Počáteční úloha:
d), $\mathbf{x}(0) = (1, 0, -1)^\top$

f) $$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' &= -x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3' &= -x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2' &= -2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_3' &= x_1 + x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 - 3x_2 \\ x_2' &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

$\boxed{2.}$ Najdi řešení nehomogenních úloh:

a) $$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 + 2x_2 + 4\mathrm{e}^{4t} \\ x_2' &= x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + 1 + \mathrm{e}^{t} \\ x_2' &= 3x_1 - x_2 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 3x_2 + 5t \\ x_2' &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 - x_2 \\ x_2' &= -x_1 + 2x_2 - 5\mathrm{e}^{t}\sin(t) \end{aligned}$$

Výsledky:

1. a) $\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{5t}$

   b) $\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t}$

   c) $\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t} + C_2 \begin{bmatrix} \cos(t) + 3\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} \sin(t) - 3\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{bmatrix}$

   d) $\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} + C_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-2t}$

   e) $\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

   f) $\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} + C_2 \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t \right) \mathrm{e}^{t} + C_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t}$

   g) $\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t} + C_3 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t \right) \mathrm{e}^{t}$

   h) $\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} \sin(3t) \\ -\cos(3t) \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t}$

2. a) $\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{4t} + \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 + 2t \\ t \end{bmatrix} \mathrm{e}^{4t}$

   b) $\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t}$

   c) $\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{5t} + \begin{bmatrix} 2t + \frac{13}{5} \\ -3t + \frac{12}{5} \end{bmatrix}$

   d) $\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{t} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cos(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin(t) \right)$