M5858

Cvičení 6

Doplňující úlohy

$\boxed{1.}$ Řeš následující úlohy:

a) $t^2x'' - 2tx' + 2x = 3t^4$, b) $t^2x'' - tx' + 2x = (\ln(t))^2$, c) $t^2x'' - tx' + x = t$.

$\boxed{2.}$ Nalezni první 3 členy Picardovy posloupnosti postupných aproximací a urči její limitu pro počáteční úlohu:

$$x' = 2tx, \qquad x(0) = 1.$$

$\boxed{3.}$ Ověř existenci a 1-značnost řešení následujících počátečních úloh:

a) $x_1' = 3\cos(x_1^2) - 2tx_2^2 + 1$, $x_1(2) = -1$,
$x_2' = 2\sin(x_1) + x_1^2x_2 + t^2$, $x_2(2) = 1$,

b) $x''' = xx' + (x'')^2 - t$, $x(0) = 0, x'(0) = 1, x''(0) = 0$.

$\boxed{4.}$ Nalezni odhad řešení zadané počáteční úlohy (funkce $x_L(t), x_U(t)$ takové, že: $x_L(t) \leq x(t) \leq x_U(t)$ na vhodném intervalu). Dokaž ohraničenost tohoto řešení na pravém okolí $t_0 = 0$.

$$x' = \frac{x\sin(t)}{1+t^2}, \qquad x(0) = x_0.$$

Výsledky:

1. a) $x(t) = C_1t + C_2t^2 + \frac{t^4}{2}$

   b) $x(t) = C_1t\sin(\ln(t)) + C_2t\cos(\ln(t)) + \frac{\ln^2(t)}{2} + \ln(t) + \frac{1}{2}$

   c) $x(t) = t\left(C_1 + C_2\ln(t) + \frac{\ln^2(t)}{2}\right)$

2. $x(t) = \lim_{k\to\infty} x_k(t) = \mathrm{e}^{t^2}$
3. Viz Picardovu-Lindelofovu větu (z přednášky).
4. $|x(t)| \leq x_0\mathrm{e}^{\arctan(t)}$