Př. Označme $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}(\zeta_{15^n})$. Dokažte, že $K/\mathbb{Q}$ je nekonečné Galoisovo rozšíření [tj. je algebraické, separabilní, normální] a popište, jak vypadá svaz všech podtěles tělesa K.

Řeš. Zřejmě je nekonečné, protože $[K:\mathbb{Q}] \geq [\mathbb{Q}(\zeta_{15^n}):\mathbb{Q}] = \varphi(15^n)$.

Protože každý prvek tělesa K leží v tělese $\mathbb{Q}(\zeta_{15^n})$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, tak vzhledem k tomu, že $\mathbb{Q}(\zeta_{15^n})/\mathbb{Q}$ je konečné rozšíření, je tento prvek algebraický nad $\mathbb{Q}$.

Separabilita plyne napříhled z toho, že char $K = 0$.

Protože každý prvek tělesa K leží v tělese $\mathbb{Q}(\zeta_{15^n})$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, tak vzhledem k tomu, že $\mathbb{Q}(\zeta_{15^n})/\mathbb{Q}$ je normální rozšíření, tak všechny kořeny minimálního polynomu tohoto prvku leží v $\mathbb{Q}(\zeta_{15^n})$, a tedy v K.

Připomeňme, že je-li p liché prvočíslo, tak těleso $K_p = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ je nekonečné Galoisovo rozšíření a platí

$$\mathrm{Gal}(K_p/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_p^{\times} = \varprojlim (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{\times}.$$

Platí $\mathbb{Z}_p^{\times} = \Delta_p \cdot (1+p\mathbb{Z}_p)$, $(1+p\mathbb{Z}_p, \cdot) \cong (\mathbb{Z}_p, +)$, kde Δ_p je cyklická podgrupa grupy $\mathbb{Z}_p^{\times}$ řádu $p-1$.

$$1+p\mathbb{Z}_p = \{1+p\cdot a \,;\, a \in \mathbb{Z}_p\} \leq \mathbb{Z}_p^{\times}$$

$$(1+p\cdot a)(1+pb) = 1+p(a+b+pab) \quad \text{pro lib. } a,b \in \mathbb{Z}_p$$

$$(1+pa)(1-pa+p^2a^2-p^3a^3+\dots) = 1.$$

Ukažme, že platí $K = K_3 \cdot K_5$. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\mathbb{Q}(\zeta_{15^n}) = \mathbb{Q}(\zeta_{3^n}) \cdot \mathbb{Q}(\zeta_{5^n}) \subseteq K_3 \cdot K_5$. Současně pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\mathbb{Q}(\zeta_{3^n}) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_{15^n}) \subseteq K$, podobně $\mathbb{Q}(\zeta_{5^n}) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_{15^n}) \subseteq K$. Z první inkluze plyne $K \subseteq K_3 \cdot K_5$, z druhé věty plyne $K_3 \subseteq K$, $K_5 \subseteq K$, a tedy $K_3 \cdot K_5 \subseteq K$.

$$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong \varprojlim \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{15^n})/\mathbb{Q}) \cong \varprojlim (\mathbb{Z}/15^n\mathbb{Z})^{\times} \cong$$

$$\cong \varprojlim \left((\mathbb{Z}/3^n\mathbb{Z})^{\times} \times (\mathbb{Z}/5^n\mathbb{Z})^{\times} \right)$$

Platí

$$\varprojlim \left((\mathbb{Z}/3^n\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/5^n\mathbb{Z})^\times\right) \cong$$

$$\cong \left(\varprojlim (\mathbb{Z}/3^n\mathbb{Z})^\times\right) \times \left(\varprojlim (\mathbb{Z}/5^n\mathbb{Z})^\times\right) :$$

Komutativní diagram okruhů

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}/3^{n+1}\mathbb{Z}) \arrow[d] & (\mathbb{Z}/3^{n+1}\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5^{n+1}\mathbb{Z}) \arrow[l, "\pi_{1,n+1}"'] \arrow[r, "\pi_{2,n+1}"] \arrow[d] & (\mathbb{Z}/5^{n+1}\mathbb{Z}) \arrow[d] \\
(\mathbb{Z}/3^n\mathbb{Z}) & (\mathbb{Z}/3^n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5^n\mathbb{Z}) \arrow[l, "\pi_{1,n}"'] \arrow[r, "\pi_{2,n}"] & (\mathbb{Z}/5^n\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

dává komutativní diagram grup jednotek

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}/3^{n+1}\mathbb{Z})^\times \arrow[d] & (\mathbb{Z}/3^{n+1}\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/5^{n+1}\mathbb{Z})^\times \arrow[l, "\pi_{1,n+1}"'] \arrow[r, "\pi_{2,n+1}"] \arrow[d] & (\mathbb{Z}/5^{n+1}\mathbb{Z})^\times \arrow[d] \\
(\mathbb{Z}\,3^n\mathbb{Z})^\times & (\mathbb{Z}/3^n\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/5^n\mathbb{Z})^\times \arrow[l, "\pi_{1,n}"'] \arrow[r, "\pi_{2,n}"] & (\mathbb{Z}/5^n\mathbb{Z})^\times
\end{tikzcd}$$

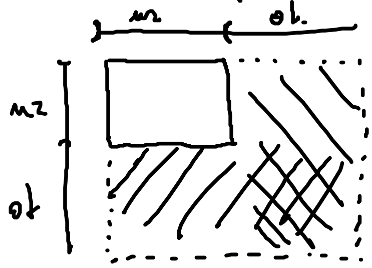
Odtud plyne, že

$$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_3^\times \times \mathbb{Z}_5^\times \cong \left(\Delta_3 \cdot (1+3\mathbb{Z}_3)\right) \times \left(\Delta_5 \cdot (1+5\mathbb{Z}_5)\right)$$

Svaz všech podtěles tělesa K je izomorfní (podle hlavní věty Galoisovy teorie nekonečných rozšíření) s duálním svazem ke svazu všech uzavřených podgrup grupy $\mathbb{Z}_3^\times \times \mathbb{Z}_5^\times$.

Víme, že $\quad \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong (\Delta_3 \times \Delta_5) \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$.

Ukažme, že libovolná uzavřená podgrupa grupy $(\Delta_3 \times \Delta_5) \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ je tvaru $H_1 \times H_2 \times H_3$, kde $H_1 \leq \Delta_3 \times \Delta_5$, $H_2 \leq \mathbb{Z}_3$, $H_3 \leq \mathbb{Z}_5$ jsou uzavřené podgrupy.



Zřejmě $H_1 \times H_2 \times H_3$ je uzavřená podgrupa grupy $(\Delta_3 \times \Delta_5) \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$. Zbývá ukázat, že jiné uzavřené podgrupy už tato grupa nemá.

Nechť H je libovolná uzavřená podgrupa této grupy.

Zvolme libovolný prvek $r=(a,b,c)\in H$, kde $a\in\Delta_3\times\Delta_5$, $b\in\mathbb{Z}_3$, $c\in\mathbb{Z}_5$.
Grupa $\Delta_3\times\Delta_5$ má exponent 4, její neutrální prvek píšeme 1.
Ukážeme, že pak $(1,b,0)$ i $(1,0,c)$ jsou prvky H. Pak totiž dostaneme, že také $(a,0,0)\in H$. Tím ukážeme, že podgrupa H je součinem uzavřených podgrup z jednotlivých násobených grup.
Ukažme, že $(1,b,0)$ je limitou posloupnosti prvků z H.
Pro libovolné $n\in\mathbb{N}$ označme $x_n=t_n\cdot r\in H$, kde $t_n\in\mathbb{Z}$ splňuje $4\mid t_n$, $t_n\equiv 1 \pmod{3^n}$, $t_n\equiv 0 \pmod{5^n}$. Pak prvek x_n má v 1. složce 1, protože $a^4=1$. Dále ve 2. složce je, protože $t_n=1+3^n\cdot k_n$, kde $k_n\in\mathbb{Z}$, prvek

$$t_n b = (1+3^n k_n)\cdot b = b + 3^n\cdot\underbrace{k_n\cdot b}_{\in\mathbb{Z}_3} \in b+3^n\mathbb{Z}_3.$$

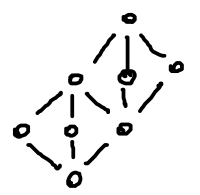
Ve 3. složce je, protože $t_n=5^n\cdot l_n$, kde $l_n\in\mathbb{Z}$, prvek

$$t_n\cdot c = 5^n l_n c \in 5^n\mathbb{Z}_5.$$

Existence čísla t_n splňujícího požadavky plyne z Čínské zbytkové věty, protože čísla $4, 3^n, 5^n$ jsou po dvou nesoudělná.

Protože posloupnost x_n má limitu $(1,b,0)$, všechny její prvky leží v H a H je uzavřená, tak $(1,b,0)\in H$.
Analogicky $(1,0,c)\in H$.

Z předchozího plyne, že svaz všech uzavřených podgrup grupy $Gal(K/\mathbb{Q})$ je izomorfní se součinem svazu všech podgrup grupy $(\Delta_3\times\Delta_5)$, svazu všech uzavřených podgrup grupy $\mathbb{Z}_3$ a svazu všech uzavřených podgrup grupy $\mathbb{Z}_5$.
Svaz podgrup grupy $\Delta_3\times\Delta_5$ je izomorfní se svazem všech

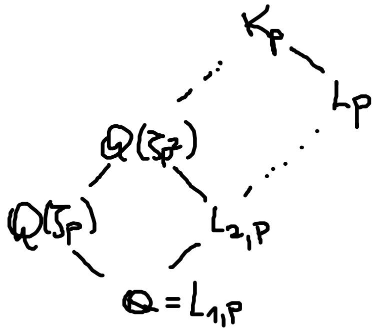


podgrup grupy $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$; tato grupa má tři dvojprvkové podgrupy $\langle([1]_2,[0]_4)\rangle$, $\langle([0]_2,[2]_4)\rangle$, $\langle([1]_2,[2]_4)\rangle$.
Má tři 4-prvkové podgrupy: $\langle([0]_2,[1]_4)\rangle$, $\langle([1]_2,[1]_4)\rangle$, $\langle([1]_2,[0]_4),([0]_2,[2]_4)\rangle$.

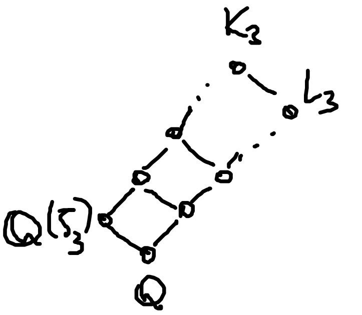
Pokud se nám podaří najít podtělesa, která odpovídají podgrupám $\{1\}\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5$, $(\Delta_3\times\Delta_5)\times\{0\}\times\mathbb{Z}_5$, $(\Delta_3\times\Delta_5)\times\mathbb{Z}_3\times\{0\}$, budeme vědět, že každé podtěleso tělesa K je kompozitem podtěles těchto tří těles. První z těchto těles je $\mathbb{Q}(\zeta_{15})$.

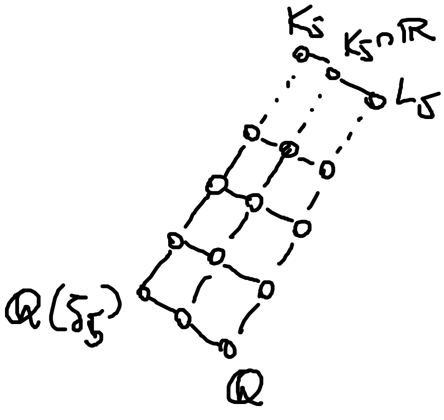
Připomeňme z předchozího: pro libovolné liché prvočíslo p je těleso $K_p=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ kompozitem dvou těles, což odpovídá

$$\mathrm{Gal}(K_p/\mathbb{Q}) \cong \Delta_p\cdot(1+p\mathbb{Z}_p)$$



$L_{k,p}$ je jediné podtěleso tělesa $\mathbb{Q}(\zeta_{p^k})$ stupně p^{k-1} nad $\mathbb{Q}$. ($\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^k}/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$, což je cyklická grupa řádu $(p-1)p^{k-1}$)





Proto podtěleso odpovídající $\{1\}\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5$ je $\mathbb{Q}(\zeta_{15})=\mathbb{Q}(\zeta_3)\cdot\mathbb{Q}(\zeta_5)$, podtěleso odpovídající $(\Delta_3\times\Delta_5)\times\{0\}\times\mathbb{Z}_5$ je L_3, podtěleso odpovídající $(\Delta_3\times\Delta_5)\times\mathbb{Z}_3\times\{0\}$ je L_5.

Každé podtěleso tělesa K lze jednoznačně napsat jako kompozitum podtělesa tělesa $\mathbb{Q}(\zeta_{15})$, podtělesa tělesa L_3 a podtělesa tělesa L_5.