Exercise 1. *Show that $\mathbb{C}P^n$ is a CW-complex.*

$\mathbb{C}P^n = \{$1-dim kompl. vekt. podprostory v $\mathbb{C}^{n+1}\}$

$= \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim \qquad v \sim \lambda v$ pro $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\mathbb{C}P^0$ je bod tedy CW-komplex

Ukážeme, že $\mathbb{C}P^n$ dostaneme z $\mathbb{C}P^{n-1}$ přilepením buňky dimenze $2n$

$\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / v \sim \lambda v, \ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$= S^{2n+1} / v \sim \lambda v, \ \|v\| = 1, \ |\lambda| = 1$

$v = v_1, \dots v_n, v_{n+1}$
Buď $v_{n+1} = 0$
nebo lze v vynásobit λ, že pak $v_{n+1} > 0$.

$= \{(w, \sqrt{1 - |w|^2}) \in \mathbb{C}^{n+1}, \ w \in D^{2n}\} / w \sim \lambda w$ pro $\|w\| = 1$ a $|\lambda| = 1$

$= D^{2n} \cup_{f_n} \{S^{2n-1} / w \sim \lambda w, \ w \in S^{2n-1}, \ |\lambda| = 1\}$

$= D^{2n} \cup_{f_n} \mathbb{C}P^{n-1}$, kde

$$f_n : \partial D^{2n} \Rightarrow S^{2n-1} \xrightarrow[\text{projekce}]{} S^{2n-1} / w \sim \lambda w, \ |\lambda| = 1 \ = \ \mathbb{C}P^{n-1}$$

$\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup \dots e^{2n}$

Exercise 2. *Let $A = \{\frac{1}{n}\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$. Show that (I, A) does not have the HEP, i.e. the inclusion $A \hookrightarrow I$ is not a cofibration.*

To, že $(I = [0,1], A)$ má Homotopy Extension Property je ekvivalentní s tím, že existuje retrakce

$$r : I \times J = [0,1] \times [0,1] \longrightarrow A \times [0,1] \cup [0,1] \times \{0\}$$

K tomu, že taková retrakce neexistuje použijeme pojem LOKÁLNĚ SOUVISLÉHO PROSTORU

V něm každé okolí bodu má souvislé podokolí.

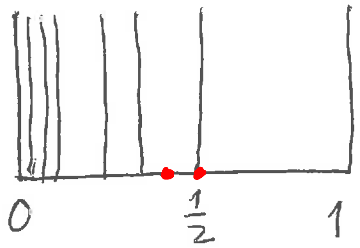
Protože spojité zobrazení zachovává souvislé podmnožiny, je obraz lok. souvislého prostoru lok. souvislý prostor.

V našem případě je $I \times J$ lokálně souvislý, zatímco $A \times [0,1] \cup [0,1] \times \{0\}$ není.

Retrakce je spojité surjektivní zobrazení ∎

Proto v našem případě nemůže existovat.

Exercise 3. *From the lecture we know that* $A := \{\frac{1}{n}, n \in \mathrm{N}\} \cup \{0\}$ *as a subspace of* $\mathbb{R}$ *is not a CW-complex. Show that* $X := I \times \{0\} \cup A \times I$ *is not a CW-complex either.*

$X =$ 

Sporem. Předpokládejme, že X je CW-komplex.

- nemůže mít buňku dimenze ≥ 2, neboť odstraněním jednoho bodu přestane být souvislá
- Body $(\frac{1}{n}, 0) \in X$ nemohou ležet v 1-buňkách. Jejich odstraněním vzniknou 3 komponenty souvislosti
- Každá podmnožina 0-buněk je diskrétní. Ale $\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ diskrétní není.

X nemůže být CW-komplex.

Exercise 4. *Prove that every compact set A in a CW-complex X can have a nonempty intersection with only finitely many cells.*

Buňky CW-komplexu X značíme e^β

$J = \{\beta \,;\, e^\beta \cap A \neq \emptyset\}$

B je množina bodů z průniků $e^\beta \cap A$, jeden bod pro každý neprázdný průnik

Dokážeme (1) B je uzavřená, $B \subseteq A$ kompaktní $\Rightarrow$ B kompaktní

(2) B je diskrétní

Z těchto dvou vlastností plyne, že B je konečná.

(1) Uzavřenost: Indukcí dokážeme, že $B \cap X^n$ je uzavřená.

$B \cap X^0$ diskrétní $\Rightarrow$ $B \cap X^0$ uzavřená

Předpokládejme $B \cap X^{n-1}$ uzavřená

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, hook] & X^{n-1} \arrow[d, hook] \\ D^n_\alpha \arrow[r, "F_\alpha"'] & X^n \end{tikzcd}$$

Topologie X^n je určena topologií X^{n-1} a D^n_α.

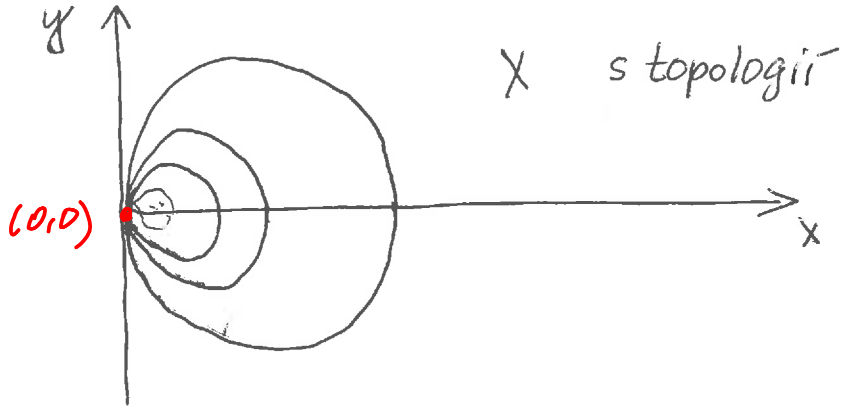
Tedy $B \cap X^n$ je uzavřená, právě když $B \cap X^{n-1}$ je uzavřená (ind. předpoklad) a $F_\alpha^{-1}(B \cap X^n)$ je uzavřená v D^n_α. $F_\alpha^{-1}(B \cap X^n)$ je prázdná nebo bod, tedy uzavřená.

(2) Diskrétnost $\forall b \in B$, je $B \setminus \{b\}$ uzavřená (stejně jako výše). Proto je $\{b\}$ otevřená, tedy B je diskrétní.

Exercise 5. *Show that the Hawaiian earring given by*

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x - \frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \text{ for some } n\}$$

is not a CW-complex.



X s topologií $\mathbb{R}^2$

<u>Sporem:</u> X je CW-komplex

Bod $(0,0) \in X$ musí být 0-buňka, po odstranění dostaneme nekonečně mnoho komponent.

X musí mít nekonečně mnoho 0-buněk nebo 1-buněk.

To je ale spor s předchozím cvičením, neboť X je kompaktní.

Exercise 6. *Show that for a short exact sequence* $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ *of abelian groups (or more generally modules over a commutative ring) the following are equivalent:*

(1) There exists $p : B \to A$ *such that* $pf = \mathrm{id}_A$.

(2) There exists $q : C \to B$ *such that* $gq = \mathrm{id}_C$.

(3) There exist $p : B \to A$ *and* $q : C \to B$ *such that* $fp + qg = \mathrm{id}_B$.

(Another equivalent condition is $B \cong A \oplus C$, *with* (p, g) *and* $f + q$ *being the respective inverse isomorphisms.)*

$$0 \longrightarrow A \underset{p}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \underset{q}{\overset{g}{\rightleftarrows}} C \longrightarrow 0$$

(1) $\Rightarrow$ (2) $\wedge$ (3) Mějme $p : B \to A$ $p \circ f = \mathrm{id}_A$

Chceme definovat $q : C \to B$.

g je epimorfismus $\forall c \in C \ \exists b \in B \ \ g(b) = c$

Chceme položit $q(c) = b - fp(b) \in B$.

Musíme ale ukázat, že nezávisí na výběru b.

Nechť $b, b' \in B$, $g(b) = g(b') = c$, tedy

$g(b - b') = 0$, $b - b' \in \ker g = \mathrm{im}\, f$, $\exists a \in A$

$b - b' = f(a)$. Nyní

$$\big(b - fp(b)\big) - \big(b' - fp(b')\big) = (b - b') - fp(b - b') =$$

$$= f(a) - f\underbrace{pf}_{\mathrm{id}_A}(a) = f(a) - f(a) = 0$$

Dokážeme $g \circ q = \mathrm{id}_C$:

$$g \circ q(c) = g \circ (b - fp(b)) = g(b) - \underbrace{gf}_{0}p(b) = g(b) = c.$$

Dokážeme (3)

$$f \circ p(b) + q \circ g(b) = fp(b) + b - fp(b) = b$$

(3) $\Rightarrow$ (1) a (2)

$$fp + qg = id_B \quad / \circ f$$

$$fpf + q\underbrace{gf}_{0} = f$$

$$f(pf) = f = f \circ id_A$$

Protože je f injektivní, je $fp = id_A$.

$$fp + qg = id_B \quad / g \circ$$

$$\underbrace{gf}_{0}p + gqg = g$$

$$(gq) \circ g = id_C \circ g$$

Protože je g epimorfismus, je $gq = id_C$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Pro $b \in B$ definujeme $\quad (gq = id_C)$

$$p(b) = f^{-1}(b - q \circ g(b))$$

Definice je korektní, neboť $b - q \circ g(b) \in \ker g = \operatorname{im} f$

Potom

$$p \circ f(a) = f^{-1}(f(a) - q \circ g \circ f(a)) = f^{-1}(f(a)) = a.$$

Exercise 7. *Let* $0 \to A_* \xrightarrow{f} B_* \xrightarrow{g} C_* \to 0$ *be a short exact sequence of chain modules. We have defined the connecting homomorphism* $\partial_* : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ *by the formula* $\partial_*[c] = [a]$*, where* $\partial c = 0$*,* $f(a) = \partial b$ *and* $g(b) = c$*. Show that this definition does not depend on* a *nor* b*.*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & A_{n+1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial"] & B_{n+1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\partial"] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & A_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial"] & B_n \ni b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\partial"] & C_n \ni c \arrow[r] \arrow[d, "\partial_n"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "f"] & B_{n-1} \arrow[r, "g"] & C_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$b \mapsto c, \qquad c \mapsto 0, \qquad a \longmapsto \partial b \longmapsto 0$$

Homologické grupy $\quad H_n(C) = \dfrac{\ker \partial_n}{im\, \partial_{n+1}}$

Spojující homomorphismus

$$\partial_* : H_n(C_*) \longrightarrow H_{n-1}(A_*)$$

$$\partial_*[c] = [a]$$

kde $\underline{c}$ a $\underline{a}$ jsou popsány výše.

Korektnost:

(1) $\partial a = 0$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto] & \partial b \\
A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & B_{n-1} \arrow[d, "\partial"] \\
A_{n-2} \arrow[r] & B_{n-2} \\
\partial a \arrow[r, mapsto] & \partial\partial b = 0
\end{tikzcd}$$

(2) K danému c vezmeme b a b', že $g(b) = g(b') = c$

K nim vezmeme a, a', že $f(a) = \partial b$

a $f(a') \in \partial b'$. Chceme ukázat, že

a, a' se liší o hranici.

7(ii)

$$\begin{tikzcd}
 & a'' \arrow[r, mapsto] & b,\ b' \arrow[r, mapsto] & c \\
 & & b-b' \arrow[r, mapsto] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & B_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & C_n \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & B_{n-1} & & \\
 & a-a' \arrow[r, mapsto] & \partial b - \partial b' & &
\end{tikzcd}$$

Protože je f_{n-1} injektivní, musí být

$$\partial a'' = a - a'$$

z komutativity diagramu.

(3) Nezávislost na volbě c.

Stačí ak: Je-li $c = \partial c'$, pak vybrané $a = 0$.

$$\begin{tikzcd}
 & b' \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & c' \arrow[d, mapsto] \\
B_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \partial b' \arrow[r] \arrow[d, mapsto] & C_{n+1} \arrow[d, "\partial"] & \partial c' = c \\
B_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 & C_n & \\
A_{n-1} \arrow[r, tail] & B_{n-1} & & \\
a = 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Spojující homomorfismus indukuje dlouhou ex. posloupnost

$$H_{n+1}(C) \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{f_*} H_n(B) \xrightarrow{g_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A)$$