Diskrétní deterministické modely
1. cvičná pisemka

Teoretická část

1. Diferenční rovnici prvního řádu $\Delta x - 4x(1 - x^\sigma) = 0$ přepište do tvaru rekurentní formule.

2. Nechť posloupnost $x(t)$ je řešením počáteční úlohy
$$x(t+1) = \frac{x(t)}{t+1}, \quad x(0) = 1.$$
Určete $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$.

3. Najděte stacionární bod rovnice $x(t+1) = |x(t) - 1| + \frac{1}{2}$ a vyšetřete jeho stabilitu.

4. Napište model vývoje dvou konkurujících si populací s oddělenými generacemi za předpokladů:
   (i) Izolovaná i-tá populace se vyvíjí podle Bevertonova-Holtova modelu s růstovým koeficientem r_i a s kapacitou prostředí K_i, $i = 1, 2$.
   (ii) Za přítomnosti j-té populace je kapacita prostředí pro i-tou populaci nepřímo úměrná velikosti j-té populace, $i \neq j$.

Výpočetní část

1. Najděte obecné řešení systému rovnic
$$\begin{aligned} x(t+1) &= -x(t) + y(t) \\ y(t+1) &= \phantom{-x(t) +{}} 2y(t) + t. \end{aligned}$$

2. Uvažujte autonomní rovnici druhého řádu
$$x(t+1) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-1)}{K}\right);$$
parametry r a K jsou kladné. Najděte všechny její rovnovážné body a vyšetřete jejich stabilitu.
Uvedenou rovnici interpretujte.

Čas na vypracování: Teoretická část 60 minut, výpočetní část 40 minut.
Bodování: Teoretická část 4×1 bod, výpočetní část 2×2 body.
Hodnocení: V každé části — [3.5,4]=A, [2,3.5)=C, [0.5,2)=E;
pokud je v teoretické části dosaženo méně než 0.5 bodu, je celkové hodnocení F, jinak je celkové hodnocení průměrem hodnocení obou částí.

Řešení:

Teoretická část

1.

$$\begin{aligned} \Delta x &= 4x - 4xx^\sigma \\ x^\sigma - x &= 4x - 4xx^\sigma \\ x^\sigma(1+4x) &= x(4+1) \\ x^\sigma &= \frac{5x}{1+4x} \end{aligned}$$

2. $\dfrac{x}{t+1} > 0$ pro $x > 0$ a $t \in \mathbb{N}$, tedy $x(t) > 0$ pro všechna t.
   $\left|\dfrac{x}{t+1}\right| \le \dfrac{|x|}{2}$ pro $t \ge 1$, tedy $x(t) \le \left(\frac{1}{2}\right)^2$ pro všechna t.
   $\lim\limits_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^t = 0$. Celkem $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

   Nebo: $x(t) = \frac{1}{t!}$, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t!} = 0$.

3. $|x-1| + \frac{1}{2} = x \quad \longrightarrow \quad x = \frac{3}{4}$.
   Odchylka od stacionárního řešení $y(t) = x(t) - \frac{3}{4}$.
   Pro „malou" odchylku je $y(t+1) = x(t+1) - \frac{3}{4} = |x(t) - 1| - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} - x(t) = -y(t)$, tedy $y(t) = (-1)^t y(0)$. Odchylka se nezvětšuje ani nezmenšuje, řešení je stabilní (nikoliv asymptoticky).

4. Například:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \frac{\alpha r_1 K_1 y(t)}{K_1 + \alpha(r_1 - 1)x(t)y(t)} \\ y(t+1) &= \frac{\beta r_2 K_2 x(t)}{K_2 + \beta(r_2 - 1)x(t)y(t)} \end{aligned}$$

Výpočetní část

1. $x(t) = 2^t A + (-1)^t B - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$,

   $y(t) = 3 \cdot 2^t A - t - 1$,

   podrobněji:

   $x(t) = \frac{1}{3}\big(3x_0 - y_0 + \frac{1}{2}t_0 - \frac{1}{4}\big)(-1)^{t-t_0} + \frac{1}{3}\big(y_0 + t_0 + 1\big)2^{t-t_0} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$,

   $y(t) = \big(y_0 + t_0 + 1\big)2^{t-t_0} - t - 1$

2. Rovnovážné body jsou $x_1^* = 0$ a $x_2^* = K\dfrac{r-1}{r}$.

   - $0 < r < 1 \Rightarrow x_1^*$ je stabilní, x_2^* je nestabilní
   - $1 < r < 2 \Rightarrow x_1^*$ je nestabilní, x_2^* je stabilní
   - $2 < r \Rightarrow x_1^*$ oba rovnovážné body jsou nestabilní

   Rovnice může modelovat vývoj velikosti populace, u níž vnitrodruhová konkurence působí se zpožděním jedné generace. Parametr r je vnitřní koeficient růstu (maximální možný přírůstek velikosti populace, růstový koeficient populace bez vnitrodruhové konkurence, biotický potenciál modelované populace), parametr K vyjadřuje kapacitu (úživnost) prostředí; ta závisí na růstovém koeficientu a je $\left(1 - \dfrac{1}{r}\right)$-násobkem parametru K.

Diskrétní deterministické modely
2. cvičná pisemka

Teoretická část

1. Diferenční rovnici druhého řádu $x^{\sigma\sigma}\Delta x = 4x$ přepište do tvaru systému explicitních diferenčních rovnic prvního typu a prvního řádu.
2. Napište nějakou diferenční rovnici vyššího řádu, která má řešení $x(t) = 4t^2 + 2\cos t\frac{\pi}{2}$.
3. Najděte všechna equilibria autonomní rovnice $x(t+1) = 1 - \big(x(t) - 1\big)^k$, kde $k \in \mathbb{N}_0$, a vyšetřete jejich stabilitu. Je některé z equilibrií dosažitelné?
4. Nechť posloupnost g je geometrická s počátečním (nultým) členem γ a kvocientem q, posloupnost H_{13} je jednotkový skok v čase 13. Najděte obraz součinu těchto posloupností v transformaci Z a určete jeho poloměr divergence.

Výpočetní část

1. Najděte obecné řešení rovnice
$$x(t+2) - x(t) = 2^t t \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$
2. Uvažujte autonomní systém
$$\begin{aligned} H(t+1) &= rH(t)\exp\big(-aP(t)\big), \\ P(t+1) &= cH(t)\left[1 - \exp\big(-aP(t)\big)\right]; \end{aligned}$$
parametry r, a a c jsou kladné. Najděte rovnovážný bod systému s oběma souřadnicemi kladnými a vyšetřete jeho stabilitu.

Čas na vypracování: Teoretická část 60 minut, výpočetní část 40 minut.
Bodování: Teoretická část 4 × 1 bod, výpočetní část 2 × 2 body.
Hodnocení: V každé části — [3.5,4]=A, [2,3.5)=C, [0.5,2)=E;
pokud je v teoretické části dosaženo méně než 0.5 bodu, je celkové hodnocení F, jinak je celkové hodnocení průměrem hodnocení obou částí.

Řešení:

Teoretická část

1. $x_1 = x$, $x_2 = x^\sigma$,

$$x_1^\sigma = x_2, \qquad \Delta x_1 = -x_1 + x_2, \qquad \Delta x_1 = -x_1 + x_2,$$
$$x_2^\sigma = \frac{4x_1}{x_2 - x_1}, \qquad \Delta x_2 = \frac{4x_1}{x_2 - x_1} - x_2, \qquad \Delta x_2 = \frac{x_1(4 + x_2) - x_2^2}{x_2 - x_1}.$$

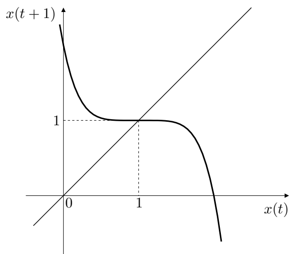
2. Napíšeme rovnici lineární homogenní.
Charakteristická rovnice musí mít alespoň trojnásobný kořen $\lambda_1 = 1$ a imaginární kořen $\lambda_2 = \mathrm{i}$.
Nejjednodušší taková rovnice je $(\lambda - 1)^3(\lambda^2 + 1) = 0$, po úpravě $\lambda^5 - 3\lambda^4 + 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$.
Hledaná rovnice může být

$$x(t + 5) - 3x(t + 4) + 4x(t + 3) - 4x(t + 2) + 3x(t + 1) - x(t) = 0.$$

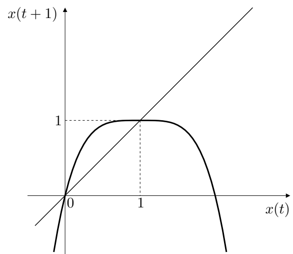
Také lze napsat lineární nehomogenní rovnici

$$x(t+2) + x(t) = 8t^2 + 16t + 16 \quad \text{nebo} \quad x(t+3) - 3x(t+2) + 3x(t+1) - x(t) = 4\left(\cos t\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right).$$

3. $f(x) = \begin{cases} 1 - (x-1)^k, & k > 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$, $f'(x) = \begin{cases} -k(x-1)^{k-1}, & k > 0, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$
Equilibria: $x = 1 - (x-1)^k$, tj. $x^* = 1$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}_0$.
Pro k sudé, $k > 0$ existuje druhé equlibrium 0.
$|f'(1)| = 0 < 1$, tj. 1 je asymptoticky stabilní.
$|f'(0)| = k > 1$, tj. 0 je nestabilní, dokonce repelentní.
Pro $k = 0$ je equilibrium $x^* = 1$ dosažitelné.



k liché



k sudé

4. $g(t) = \gamma q^t$, $H_{13}(t) = \begin{cases} 0, & t < 13, \\ 1, & t \geq 13. \end{cases}$ $\widetilde{gH_{13}}(z) = \sum\limits_{j=13}^{\infty} \gamma q^j z^{-j} = \gamma\left(\frac{q}{z}\right)^{13} \frac{1}{1-\frac{q}{z}} = \gamma q^{13}\frac{z^{-12}}{z-q}$,
konverguje pro $|\frac{q}{z}| < 1$, tj. $R = |q|$.

Výpočetní část

1. $x(t) = A + (-1)^t B + \frac{1}{25}2^t(8 - 5t)\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$
2.
   - $r \leq 1$ rovnovážný bod uvnitř prvního kvadrantu neexistuje
   - $r > 1$ rovnovážný bod je $(H^*, P^*) = \left(\frac{1}{ac}\frac{r\ln r}{r-1}, \frac{\ln r}{a}\right)$.

$$\mathsf{J}(H, P) = \begin{pmatrix} r\mathrm{e}^{-\alpha P} & -arH\mathrm{e}^{-\alpha P} \\ c\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha P}\right) & acH\mathrm{e}^{-\alpha P} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{J}^* = \mathsf{J}(H^*, P^*) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{c}\frac{r}{r-1}\ln r \\ c\frac{r-1}{r} & \frac{1}{r-1}\ln r \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{tr}\mathsf{J}^* = 1 + \frac{\ln r}{r-1}, \ \det\mathsf{J}^* = \frac{1-r}{r}\ln r.$$

$|\operatorname{tr}\mathsf{J}^*| - 1 = \frac{1}{r-1}\ln r > \frac{1}{r}\ln r > \left(\frac{1}{r} - 1\right)\ln r = \frac{1-r}{r}\ln r = \det\mathsf{J}^*$, tedy rovnovážný bod (H^*, P^*) je nestabilní.