Diskrétní deterministické modely
1. cvičná pisemka

Teoretická část

1. Diferenční rovnici prvního řádu $\Delta x - 4x(1 - x^\sigma) = 0$ přepište do tvaru rekurentní formule.

2. Nechť posloupnost $x(t)$ je řešením počáteční úlohy
$$x(t+1) = \frac{x(t)}{t+1}, \quad x(0) = 1.$$
Určete $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

3. Najděte stacionární bod rovnice $x(t+1) = |x(t) - 1| + \frac{1}{2}$ a vyšetřete jeho stabilitu.

4. Napište model vývoje dvou konkurujících si populací s oddělenými generacemi za předpokladů:
   (i) Izolovaná i-tá populace se vyvíjí podle Bevertonova-Holtova modelu s růstovým koeficientem r_i a s kapacitou prostředí K_i, $i = 1, 2$.
   (ii) Za přítomnosti j-té populace je kapacita prostředí pro i-tou populaci nepřímo úměrná velikosti j-té populace, $i \neq j$.

Výpočetní část

1. Najděte obecné řešení systému rovnic
$$\begin{aligned} x(t+1) &= -x(t) + y(t) \\ y(t+1) &= \qquad\quad 2y(t) + t. \end{aligned}$$

2. Uvažujte nelineární autonomní rovnici druhého řádu
$$Y(t+2) = cY(t) + g\big(y(t+1) - Y(t)\big) + A_0,$$
kde funkce g je definována vztahem $g(\xi) = \gamma\dfrac{\xi}{1+\xi}$, parametry γ a A_0 jsou kladné, pro parametr c platí $0 < c < 1$. Najděte všechny jeho rovnovážné body a vyšetřete jejich stabilitu.
Systém interpretujte jako model nějakého reálného procesu.

Čas na vypracování: Teoretická část 60 minut, výpočetní část 40 minut.
Bodování: Teoretická část 4×1 bod, výpočetní část 2×2 body.
Hodnocení: V každé části — [3.5,4]=A, [2,3.5)=C, [0.5,2)=E;
pokud je v teoretické části dosaženo méně než 0.5 bodu, je celkové hodnocení F, jinak je celkové hodnocení průměrem hodnocení obou částí.

Řešení:

Teoretická část

1.

$$\begin{aligned}\Delta x &= 4x - 4xx^\sigma\\ x^\sigma - x &= 4x - 4xx^\sigma\\ x^\sigma(1+4x) &= x(4+1)\\ x^\sigma &= \frac{5x}{1+4x}\end{aligned}$$

2. $\dfrac{x}{t+1} > 0$ pro $x > 0$ a $t \in \mathbb{N}$, tedy $x(t) > 0$ pro všechna t.
   $\left|\dfrac{x}{t+1}\right| \le \dfrac{|x|}{2}$ pro $t \ge 1$, tedy $x(t) \le \left(\frac{1}{2}\right)^2$ pro všechna t.
   $\lim\limits_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^t = 0$. Celkem $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

   Nebo: $x(t) = \frac{1}{t!}$, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t!} = 0$.

3. $|x-1| + \frac{1}{2} = x \quad \longrightarrow \quad x = \frac{3}{4}$.
   Odchylka od stacionárního řešení $y(t) = x(t) - \frac{3}{4}$. Pro „malou“ odchylku je
   $y(t+1) = x(t+1) - \frac{3}{4} = |x(t)-1| + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = 1 - x(t) - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - x(t) = -y(t)$, tedy $y(t) = (-1)^t y(0)$.
   Odchylka se nezvětšuje ani nezmenšuje, řešení je stabilní (nikoliv asymptoticky).

4. Například:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= \frac{\alpha r_1 K_1 y(t)}{K_1 + \alpha(r_1-1)x(t)y(t)}\\ y(t+1) &= \frac{\beta r_2 K_2 x(t)}{K_2 + \beta(r_2-1)x(t)y(t)}\end{aligned}$$

Výpočetní část

1. $x(t) = 2^t A + (-1)^t B - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$, $y(t) = 3\cdot 2^t A - t - 1$,
   podrobněji: $x(t) = \frac{1}{3}\big(3x_0 - y_0 + \frac{1}{2}t_0 - \frac{1}{4}\big)(-1)^{t-t_0} + \frac{1}{3}\big(y_0 + t_0 + 1\big)2^{t-t_0} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$,
   $y(t) = \big(y_0 + t_0 + 1\big)2^{t-t_0} - t - 1$

2. Při označení $f(x,y) = cy + g(y-x) + A_0$ je rovnice tvaru $Y(t+2) = f\big(Y(t), Y(t+1)\big)$.
   Stacionární body: $cY + g(Y-Y) + A_0 = Y$, odtud $Y^* = \dfrac{A_0}{1-c}$, neboť $g(0) = 0$.
   $f_x(x,y) = -g'(y-x)$, $f_y(x,y) = c + g'(y-x)$; $g'(\xi) = \gamma\dfrac{1+\xi-\xi}{(1+\xi)^2}$, $g'(0) = \gamma$.
   Linearizovaná rovnice je
   $Y(t+2) = Y^* - \gamma\big(Y(t) - Y^*\big) + (c+\gamma)\big(Y(t) - Y^*\big) = (c+\gamma)Y(t+1) - \gamma Y(t) + A_0$,
   její charakteristická rovnice $\lambda^2 - (c+\gamma)\lambda + \gamma = 0$ má kořeny
   $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(c + \gamma \pm \sqrt{(c+\gamma)^2 - 4\gamma}\right) = \begin{cases} c, \\ \gamma. \end{cases}$
   Poněvadž $0 < c < 1$ a $\gamma > 0$, dostáváme závěr:

   - $\gamma < 1 \;\Rightarrow\; Y^*$ je asymptoticky stabilní,
   - $\gamma > 1 \;\Rightarrow\; Y^*$ je nestabilní.

   Interpretace: Jedná se o modifikaci Hansenova-Samuelsonova modelu vývoje produkce. Akcelerátorem je v tomto případě rostoucí a ohraničená funkce g (na rozdíl od klasického modelu s lineárním akcelerátorem).

Diskrétní deterministické modely
2. cvičná pisemka

Teoretická část

1. Diferenční rovnici druhého řádu $x^{\sigma\sigma}\Delta x = 4x$ přepište do tvaru systému explicitních diferenčních rovnic prvního typu a prvního řádu.
2. Napište nějakou diferenční rovnici vyššího řádu, která má řešení $x(t) = 4t^2 + 2\cos t\frac{\pi}{2}$.
3. Najděte všechna equilibria autonomní rovnice $x(t+1) = x(t) - \big(x(t) - 1\big)^k$, kde $k \in \mathbb{N}_0$, a vyšetřete jejich stabilitu.
4. Nechť posloupnost g je geometrická s počátečním (nultým) členem γ a kvocientem q, posloupnost H_{13} je jednotkový skok v čase 13. Najděte obraz součinu těchto posloupností v transformaci Z a určete jeho poloměr divergence.

Výpočetní část

1. Najděte obecné řešení rovnice

$$x(t+2) - x(t) = 2^t t \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

2. Uvažujte autonomní systém

$$\begin{aligned} H(t+1) &= rH(t)\exp\big(-aP(t)\big), \\ P(t+1) &= cH(t)\big[1 - \exp\big(-aP(t)\big)\big]\,; \end{aligned}$$

parametry r, a a c jsou kladné. Najděte rovnovážný bod systému s oběma souřadnicemi kladnými a vyšetřete jeho stabilitu.

Čas na vypracování: Teoretická část 60 minut, výpočetní část 40 minut.
Bodování: Teoretická část 4×1 bod, výpočetní část 2×2 body.
Hodnocení: V každé části — [3.5,4]=A, [2,3.5)=C, [0.5,2)=E;
pokud je v teoretické části dosaženo méně než 0.5 bodu, je celkové hodnocení F, jinak je celkové hodnocení průměrem hodnocení obou částí.

Řešení:

Teoretická část

1. $x_1 = x$, $x_2 = x^\sigma$,

$$x_1^\sigma = x_2, \qquad \Delta x_1 = -x_1 + x_2, \qquad \Delta x_1 = -x_1 + x_2,$$
$$x_2^\sigma = \frac{4x_1}{x_2 - x_1}, \qquad \Delta x_2 = \frac{4x_1}{x_2 - x_1} - x_2, \qquad \Delta x_2 = \frac{x_1(4 + x_2) - x_2^2}{x_2 - x_1}.$$

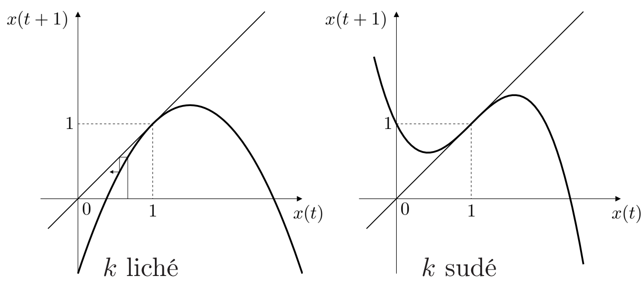
2. Napíšeme rovnici lineární homogenní.
Charakteristická rovnice musí mít alespoň trojnásobný kořen $\lambda_1 = 1$ a imaginární kořen $\lambda_2 = \mathrm{i}$.
Nejjednodušší taková rovnice je $(\lambda - 1)^3(\lambda^2 + 1) = 0$, po úpravě $\lambda^5 - 3\lambda^4 + 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$.
Hledaná rovnice může být

$$x(t + 5) - 3x(t + 4) + 4x(t + 3) - 4x(t + 2) + 3x(t + 1) - x(t) = 0.$$

Také lze napsat lineární nehomogenní rovnici

$$x(t+2) + x(t) = 8t^2 + 16t + 16 \quad \text{nebo} \quad x(t+3) - 3x(t+2) + 3x(t+1) - x(t) = 4\left(\cos t\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right).$$

3. $f(x) = x - (x-1)^k = x$, odtud $(x-1)^k = 0$, což znamená, že pro $k = 1$ je $x^* = 1$ jediné equilibrium rovnice a pro $k = 0$ rovnice equilibrium nemá.
$f'(x) = 1 - k(x-1)^{k-1}$; $f'(1) = 1$ – nerozhodnutelný případ.
Pro $n < k$ je $f^{(n)}(x) = -k(k-1)\cdots(k-n+1)(x-1)^{k-n}$, $f^{(n)}(1) = 0$.
$f^{(k)}(x) = -k! \neq 0$, tedy je-li k sudé, je $x^* = 1$ nestabilní, ale nikoliv repulsivní;
je-li k liché, je $x^* = 1$ asymptoticky stabilní, dokonce globálně.



4. $g(t) = \gamma q^t$, $H_{13}(t) = \begin{cases} 0, & t < 13, \\ 1, & t \geq 13. \end{cases}$ $\widetilde{gH_{13}}(z) = \sum\limits_{j=13}^{\infty} \gamma q^j z^{-j} = \gamma\left(\frac{q}{z}\right)^{13}\frac{1}{1-\frac{q}{z}} = \gamma q^{13}\frac{z^{-12}}{z-q}$,
konverguje pro $|\frac{q}{z}| < 1$, tj. $R = |q|$.

Výpočetní část

1. $x(t) = A + (-1)^t B + \frac{1}{25}2^t(8 - 5t)\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

2.
   - $r \leq 1$ rovnovážný bod uvnitř prvního kvadrantu neexistuje
   - $r > 1$ rovnovážný bod je $(H^*, P^*) = \left(\frac{1}{ac}\frac{r\ln r}{r-1}, \frac{\ln r}{a}\right)$.

$$\mathsf{J}(H,P) = \begin{pmatrix} r\mathrm{e}^{-\alpha P} & -arH\mathrm{e}^{-\alpha P} \\ c\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha P}\right) & acH\mathrm{e}^{-\alpha P} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{J}^* = \mathsf{J}(H^*, P^*) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{c}\frac{r}{r-1}\ln r \\ c\frac{r-1}{r} & \frac{1}{r-1}\ln r \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{tr}\mathsf{J}^* = 1 + \frac{\ln r}{r-1}, \ \det\mathsf{J}^* = \frac{1-r}{r}\ln r.$$

$|\operatorname{tr}\mathsf{J}^*| - 1 = \frac{1}{r-1}\ln r > \frac{1}{r}\ln r > \left(\frac{1}{r} - 1\right)\ln r = \frac{1-r}{r}\ln r = \det\mathsf{J}^*$, tedy rovnovážný bod (H^*, P^*) je nestabilní.

Diskrétní deterministické modely
3. cvičná pisemka

Teoretická část

1. Napište diskrétní autonomní model vývoje velikosti populace, která má konstantní úmrtnost d, porodnost přímo úměrnou své velikosti a jejíž rovnovážná velikost je $x^* = 1$.

2. Napište takový dvojrozměrný lineární homogenní systém, aby každý bod tvaru $(\xi, 2\xi)$ byl jejím dosažitelným equilibriem.

3. Uvažujte autonomní rovnici $x(t+1) = x(t)\big(\mu - 2x(t)\big)$ s kladným parametrem μ. Najděte bifurkační hodnotu μ_0 pro rovnovážný bod $x^* = 0$ a určete typ bifurkace.

4. Nechť obraz $\tilde{x} = Z(x)$ kauzální posloupnosti x v transformaci Z je dán předpisem $\tilde{x}(z) = \dfrac{2z}{1+z}$. Určete posloupnost x.

Výpočetní část

1. Najděte řešení počáteční úlohy pro diferenční rovnici druhého řádu
$$\Delta^2 x + 2\Delta x = t, \quad x(0) = 0,\ x(1) = -\tfrac{1}{4}.$$

2. Uvažujte autonomní systém
$$\begin{aligned} x(t+1) &= y(t)\exp\big(r - ax(t) - y(t)\big),\\ y(t+1) &= x(t), \end{aligned}$$
definovaný na stavovém prostoru $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ s kladnými parametry r, a. Najděte všechny jeho rovnovážné body a vyšetřete jejich stabilitu.
Systém interpretujte jako populační model.

Čas na vypracování: Teoretická část 60 minut, výpočetní část 40 minut.
Bodování: Teoretická část 4×1 bod, výpočetní část 2×2 body.
Hodnocení: V každé části — [3.5,4]=A, [2,3.5)=C, [0.5,2)=E;
pokud je v teoretické části dosaženo méně než 0.5 bodu, je celkové hodnocení F, jinak je celkové hodnocení průměrem hodnocení obou částí.

Řešení:

Teoretická část

1. $x(t+1) = \big(1 + \beta x(t) - d\big)x(t)$. Má platit $(1 + \beta x^* - d)x^* = x^* = 1$, tj. $1 + \beta - d = 1$, takže $\beta = d$. Hledaná rovnice je $x(t+1) = \big(dx(t) - d\big)x(t)$.

2. Aby systém $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t+1) = \mathsf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t)$ měl dosažitelné equilibrium, musí být matice A singulární, tj. $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & \frac{bc}{a} \end{pmatrix}$ pro $a \neq 0$.
   Aby bod $\begin{pmatrix} \xi \\ 2\xi \end{pmatrix}$ byl equilibriem, musí platit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & \frac{bc}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ 2\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+2b)\xi \\ \left(c + 2\frac{bc}{a}\right)\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ 2\xi \end{pmatrix}$.
   Odtud $a + 2b = 1$, tj. $b = \frac{1}{2}(1-a)$; $c + \frac{(1-a)c}{a} = 2$, tj. $c = 2a$. Hledaný systém je
   $$\begin{aligned} x(t+1) &= ax(t) + \tfrac{1}{2}(1-a)y(t), \\ y(t+1) &= 2ax(t) + (1-a)y(t). \end{aligned}$$
   Pro $a = 1$ dostaneme $\begin{aligned} x(t+1) &= x(t), \\ y(t+1) &= 2x(t). \end{aligned}$ pro $a = 0$ dostaneme $\begin{aligned} x(t+1) &= \tfrac{1}{2}y(t), \\ y(t+1) &= y(t), \end{aligned}$
   Některý z těchto speciálních případů bylo možné snadno uhodnout.

3. $f(x,\mu) = x(\mu - 2x)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\mu) = \mu - 4x$.
   $f(0,\mu) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,\mu) = \mu$, proto bifurkační hodnota kladného parametru μ je $\mu_0 = 1$.
   $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\mu) = -4 \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial \mu}(x,\mu) = x$, $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,\mu_0) = 0$, $\frac{\partial f^2}{\partial \mu \partial x}(x,\mu) = 1 \neq 0$
   Jedná se o transkritickou bifurkaci.

4. $\dfrac{2z}{1+z} = 2\dfrac{1}{\frac{1}{z}+1} = 2\dfrac{1}{1+\frac{1}{z}} = 2\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{z}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} 2(-1)^j\left(\dfrac{1}{z}\right)^j$. Tedy $x(t) = 2(-1)^t$.

Výpočetní část

1. Položíme $y(t) = \Delta x(t)$. Pak $\Delta y(t) = -2y(t) + t$, $y(0) = -\frac{1}{4}$.

   Tedy $y(t) = -\frac{1}{4}(-1)^t + \sum\limits_{i=0}^{t-1}(-1)^{t-1-i}i$.

   $\sum\limits_{i=0}^{t-1}(-1)^{t-1-i}i = (t-1) - (t-2) + (t-3) - (t-4) + \cdots + (-1)^{t-1}\cdot 2 + (-1)^t =$

   $$= \begin{cases} \frac{t-1}{2}, & t \text{ liché} \\ \frac{t}{2}, & t \text{ sudé} \end{cases} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\left(1 - (-1)^t\right).$$

   Celkem $y(t) = -\frac{1}{4}(-1)^t + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\left(1-(-1)^t\right) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$.

   Řešení úlohy: $x(t) = x(0) + \sum\limits_{i=0}^{t-1} y(j) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{t-1} i - \frac{1}{4}\sum\limits_{i=0}^{t-1} 1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}t(t-1) - \frac{1}{4}t = \frac{1}{4}t(t-2)$.

2. Equilibria: $x = y\mathrm{e}^{r-ax-y}$, $y = x$. Odtud $(x_1^*, y_1^*) = (0,0)$, $(x_2^*, y_2^*) = \left(\frac{r}{a+1}, \frac{r}{a+1}\right)$.

   $$\mathsf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} -a\mathrm{e}^{r-ay-y} & (1-y)\mathrm{e}^{r-ay-y} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Extinkční rovnováha $(0,0)$:

   $$\mathsf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr}\mathsf{J}(0,0) = 0,\ \det\mathsf{J}(0,0) = -\mathrm{e}^r,$$

   Dostatečná podmínka nestability $-1 > -\mathrm{e}^r$, tj. $\mathrm{e}^r > 1$ je pro kladné r splněna, $(0,0)$ je nestabilní.

   Koexistence $\left(\frac{r}{a+1}, \frac{r}{a+1}\right)$:

   $$\mathsf{J}(x_2^*, y_2^*) = \begin{pmatrix} -\frac{ar}{a+1} & 1 - \frac{r}{a+1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr}\mathsf{J}(x_2^*, y_2^*) = -a\frac{r}{a+1},\ \det\mathsf{J}(x_2^*, y_2^*) = \frac{r}{a+1}.$$

   Dostatečná podmínka stability:

   $$\frac{ar}{a+1} - 1 < \frac{r}{a+1} - 1 < 1$$
   $$\frac{ar}{a+1} < \frac{r}{a+1} < 2$$

   a odtud $a < 1$, $r < 2(a+1)$.

   Je-li $\frac{1}{2}r - 1 < a < 1$, pak je equilibrium $\left(\frac{r}{a+1}, \frac{r}{a+1}\right)$ asymptoticky stabilní, je-li alespoň jedna z těchto nerovností obrácená a ostrá, je rovnováha nestabilní.

   Interpretace:

   $$y(t+1) = x(t),$$
   $$x(t+1) = y(t)\exp\bigl(r - ax(t) - y(t)\bigr),$$

   $$y(t+1) = \left(\frac{x(t)}{y(t)}\right)x(t),$$
   $$x(t+1) = \left(\frac{y(t)}{x(t)}\exp\bigl(r - ax(t) - y(t)\bigr)\right)y(t),$$

   $y-$ juvenilní jedinci (larvy),

   $x-$ adultní jedinci (imaga),

   Mezi adultními i mezi juvenilními jedinci se projevuje vnitrodruhová konkurence.
   Juvenilní jedinci konkurují adultním.
   Pokud je subpopulace adultních jedinců „malá“, $y < 1$, pak adultní podporují růst subpopulace juvenilních; pokud je subpopulace adultních jedinců „velká“, $y > 1$, pak adultní omezují růst subpopulace juvenilních.
   Jde tedy o formu Alleho efektu.