M8230

Cvičení 8

Autonomní systémy

Vzorce:

Příklady:

$\boxed{1.}$ Najdi rovnováhy zadaných autonomních rovnic a vyšetři jejich stabilitu:

a) $x(t+1) = r \cdot x(t) \cdot \left(1 - \frac{x(t-1)}{K}\right)$

b) $x(t+1) = \mathrm{e}^{x(t)^2 - 3x(t) + 2 + \ln(x(t))}$

c) $x(t+1) = x(t) \cdot \dfrac{r \cdot K}{K + (r-1) \cdot x(t)}$

d) $$\begin{aligned} H(t+1) &= r \cdot H(t) \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot P(t)} \\ P(t+1) &= c \cdot H(t) \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-a \cdot P(t)}\right) \end{aligned}$$

$\boxed{2.}$ Nalezni všechny cykly délky dva a vyšetři jejich stabilitu:

$$x(t+1) = 1 - x(t)^2$$

$\boxed{3.}$ Nalezni všechny rovnováhy zadané rovnice v závislosti na parametru μ a najdi kritické bifurkační hodnoty tohoto parametru:

a) $x(t+1) = 2 \cdot x(t) \cdot (\mu - x(t)) + \mu$

b) $x(t+1) = \mu \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))$

c) $x(t+1) = \mu + x(t) - x(t)^2$

<table>
<tr><th colspan="3">podmínky</th><th>název (názvy)</th><th>příklad</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, \mu_0) = 1$</td><td rowspan="2">$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, \mu_0) \neq 0$</td><td>$\frac{\partial f}{\partial \mu}(x^*, \mu_0) \neq 0$</td><td>tečná bifurkace (tangent bifurcation)
ohyb (fold), sedlo-uzel (saddle-node)</td><td>$x(t+1) = x(t)\big(1 - x(t)\big) + \mu$</td></tr>
<tr><td>$\frac{\partial f}{\partial \mu}(x^*, \mu_0) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x^*, \mu_0) \neq 0$</td><td>transkritická bifurkace
(transcritical bifurcation)</td><td>$x(t+1) = x(t)\big(1 + \mu - x(t)\big)$</td></tr>
<tr><td>$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, \mu_0) = 0$</td><td>$\frac{\partial f}{\partial \mu}(x^*, \mu_0) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x^*, \mu_0) \neq 0,$
$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x^*, \mu_0) \neq 0$</td><td>vidlička (pitchfork)</td><td>$x(t+1) = x(t)\left(1 + \mu - x(t)^2\right)$</td></tr>
<tr><td>$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, \mu_0) = -1$</td><td colspan="2">$3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, \mu_0)\right)^2 + 2\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x^*, \mu_0) \neq 0,$
$2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x^*, \mu_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, \mu_0)\frac{\partial f}{\partial \mu}(x^*, \mu_0) \neq 0$</td><td>zdvojeni periody (period doubling)
flip</td><td>$x(t+1) = x(t)\left(\mu - 1 + x(t)^2\right)$</td></tr>
</table>

Obrázek 1: Některé typy bifurkací

Výsledky:

1. a) $x^* = 0$ (stabilní pro $r < 1$), $K \cdot \frac{r-1}{r}$ (stabilní pro $r \in (1;3)$)

   b) $x^* = 1$ (stabilní), 2 (nestabilní)

   c) $x^* = 0$ (stabilní pro $r < 1$), K (stabilní pro $r > 1$)

   d) $(P^*, H^*) = \left(\frac{\ln(r)}{a}, \frac{\ln(r) \cdot r}{a \cdot c \cdot (r-1)}\right)$, nestabilní pro všechna $r > 1$

2. stabilní cyklus $(0, 1, 0, 1, \dots)$, nestabilní cyklus $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dots)$

3. a) dvě flip bifurkace $(x^*, \mu^*) = (-1/2, -3/2)$ a $(1/2, 1/2)$, jedna transkritická bifurkace $(-1/2, -1/2)$

   b) transkritická bifurkace $(x^*, \mu^*) = (0, 1)$ a period-doubling bifurkace $(2/3, 3)$

   c) fold bifurkace $(x^*, \mu^*) = (0, 0)$, flip bifurkace $(1, 1)$