

# CVIČENÍ 1

## Vlastnosti posloupností

1. Rozhodněte, zda je ohraničená posloupnost, jejíž obecný člen  $a(t)$  je tvaru:

a)  $1 - \left(\cos \frac{\pi}{t}\right)^t$ ,                      b)  $\frac{t^t}{t!}$ ,                      c)  $\sum_{i=1}^t \frac{1}{i}$ .

2. Rozhodněte, zda je na množině  $\mathbb{N}$  monotónní posloupnost, jejíž obecný člen  $a(t)$  je tvaru:

a)  $\frac{t^2 + 1}{t + 1}$ ,                      b)  $\frac{2^t}{t!}$ ,                      c)  $t - \log t$ .

3. Dokažte, že následující posloupnosti jsou konvergentní.

a)  $\frac{(t!)^2}{(2t)!}$ ,                      b)  $\sum_{i=0}^t \frac{1}{t+i}$ ,                      c)  $\sum_{i=0}^t \frac{1}{i!}$ .

4. Vypočítejte limity posloupností:

a)  $\frac{2t^2 - t + 3}{3t^2 + t - 5}$ ,                      b)  $\frac{t^4 + t - 1}{t^3 + t - 1}$ ,                      c)  $\frac{\sum_{i=0}^k b_i t^i}{\sum_{i=0}^m c_i t^i}$ ,  $b_k \neq c_m \neq 0$ ,

d)  $\sqrt[t]{3^{2t+1}}$ ,                      e)  $\sqrt{t+1} - \sqrt{t}$ ,                      f)  $\frac{\sqrt[3]{t^2}}{t+1}$ ,

g)  $\frac{t - (-1)^t}{t}$ ,                      h)  $\frac{3^t + (-2)^t}{3^{t+1} + (-2)^{t+1}}$ ,                      i)  $\frac{t!}{t^t}$ ,

j)  $\sqrt[t]{t!}$ ,                      k)  $\frac{\alpha^t}{t!}$ .

5. Najděte všechny hromadné body posloupnosti:

a)  $(-1)^{t+1} \left(2 + \frac{3}{t}\right)$ ,                      b)  $1 + \frac{1}{t+1} \cos \frac{\pi}{2} t$ ,                      c)  $\frac{1}{2}((a+b) + (-1)^t(a-b))$ ,

d)  $\left(\cos \frac{2\pi}{3} t\right)^t$ ,                      e)  $\left(-1 - \frac{1}{t}\right)^t + \sin \frac{\pi}{4} t$ ,                      f)  $\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (-1)^{i-1} i$ .

6. Najděte extrémní hodnotu posloupnosti na intervalu  $[1, \infty)$ :

a)  $a(t) = \frac{t^2}{2^t}$ ,                      b)  $a(t) = t^2 - 9t - 10$ ,                      c)  $a(t) = \prod_{i=1}^t \frac{i+9}{2i-1}$ .

**Výsledky:**

1. a) je,  $0 \leq a(t) \leq 2$       b) není      c) není
2. a) ryze rostoucí      b) klesající      c) ryze rostoucí
3. a) klesající, zdola ohraničená nulou      b) klesající, zdola ohraničená nulou      c) Tylorův rozvoj  $e^1$
4. a)  $\frac{2}{3}$       b)  $\infty$       c)  $\begin{cases} 0 & k < m \\ b_k/c_m & k = m \\ \infty & k > m, b_k c_m > 0 \\ -\infty & k > m, b_k c_m < 0 \end{cases}$
- d) 9      e) 0
- g) 1      h)  $\frac{1}{3}$       f) 0
- j)  $\infty$       k) 0      i) 0
5. a)  $\{-2; 2\}$       b)  $\{0; 1; 2\}$       c)  $\{a; b\}$
- d)  $\{0; 1\}$       e)  $\{e; e \pm 1; -e \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\}$       f)  $\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$
6. a)  $a_{max} = a(3) = \frac{9}{8}$       b)  $a_{min} = a(4) = a(5) = -30$       c)  $a_{max} = a(9) = a(10) = 512$