4 Pravděpodobnostní modely pro diskrétní náhodné veličiny

4.1 Základní pojmy počtu pravděpodobnosti

- **Náhodný pokus**: jednorázové uskutečnění konstantně vymezeného souboru definičních podmínek, jehož každé opakování vede k právě jednomu z více možných výsledků.
- **Základní prostor**: neprázdná množina možných výsledků náhodného pokusu. Značí se Ω a nazývá se **jistý jev**. Opakem je **nemožný jev** $\varnothing$. Možné výsledky se značí $\omega_1, \omega_2, \ldots$
- **Jev**: vymezená množina výsledků náhodného pokusu. Značí se A, B, C, ...
- **Jev opačný k jevu** A: $\bar{A} = \Omega - A$.
- **Neslučitelné jevy**: $A \cap B = \varnothing$.
- **Jevové pole**: systém všech jevů, značí se $\mathcal{A}$.
- **Měřitelný prostor**: dvojice $(\Omega, \mathcal{A})$.
- **Pravděpodobnost**: množinová funkce $\Pr : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, která splňuje následující tři axiomy:
  - každému jevu přiřazuje nezáporné číslo (axiom nezápornosti),
  - jistému jevu přiřazuje číslo 1 (axiom normovanosti),
  - sjednocení neslučitelných jevů přiřazuje součet pravděpodobností těchto jevů (axiom spočetné aditivity); jde o teoretický protějšek relativní četnosti.
- **Pravděpodobnostní prostor**: trojice $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$.
- **Klasická pravděpodobnost**: $\Pr(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$, kde $m(A)$ je počet možných výsledků příznivých nastoupení jevu A a $m(\Omega)$ je počet všech možných výsledků. Klasická pravděpodobnost se dá použít jen tehdy, když je základní prostor konečný a všechny možné výsledky mají stejnou pravděpodobnost nastat.
- **Stochasticky nezávislé jevy**: jevy $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ jsou stochasticky nezávislé, když $\forall 1 \leq i < j < \cdots < k \leq n$: $\Pr(A_i \cap A_j \cap \cdots \cap A_k) = \Pr(A_i) \Pr(A_j) \ldots \Pr(A_k)$. Stochastická nezávislost jevů je teoretickým protějškem četnostní nezávislosti množin.
- **Podmíněná pravděpodobnost jevu** A **za podmínky** H: $\Pr(A|H) = \frac{\Pr(A \cap H)}{\Pr(H)}$, $\Pr(H) > 0$; jde o teoretický protějšek podmíněné relativní četnosti.
- **Náhodná veličina**: zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$, které možnému výsledku ω přiřazuje číslo $X(\omega)$; jde o teoretický protějšek skalárního znaku. Číselnou realizaci $X(\omega)$ zkráceně značíme x.
- **Dvourozměrný náhodný vektor**: zobrazení $(X, Y)^T$: $\Omega \to \mathbb{R}^2$, které možnému výsledku ω přiřazuje dvojici čísel $(X(\omega), Y(\omega))^T$; jde o teoretický protějšek dvourozměrného znaku. Číselnou realizaci $(X(\omega), Y(\omega))^T$ zkráceně značíme $(x, y)^T$.
- **Transformovaná náhodná veličina**: $Z = g(X)$.
- **Distribuční funkce náhodné veličiny**: $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = \Pr(X \leq x)$; jde o teoretický protějšek empirické distribuční funkce. Známe-li distribuční funkci náhodné veličiny, řekneme, že známe její **pravděpodobnostní rozdělení** (používá se též termín pravděpodobnostní model). Toto rozdělení zpravidla závisí na nějakém parametru ϑ. Zkráceně píšeme $X \sim L(\vartheta)$ a čteme: náhodná veličina X má rozdělení L s parametrem ϑ.

4.2 Diskrétní náhodná veličina

Diskrétní náhodná veličina nabývá pouze konečně nebo spočetně mnoha hodnot. Její pravděpodobnostní chování je popsáno **pravděpodobnostní funkcí**: $\forall x \in \mathbb{R} : p(x) = \Pr(X = x)$; jde o zidealizovaný protějšek četnostní funkce. Pravděpodobnostní funkce je s distribuční funkcí spjata součtovým vztahem: $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = \sum_{t \leq x} p(t)$.

4.2.1 Alternativní rozdělení

Provedeme pokus, jehož výsledkem je buď nastání sledované události (úspěch) s pravděpodobností ϑ nebo nenastání sledované události (neúspěch) s pravděpodobností $1-\vartheta$. Náhodná veličina X udává počet nastání sledované události v tomto pokusu, nabývá tedy hodnot 0 nebo 1. Píšeme $X \sim A(\vartheta)$.

$$p(x) = \begin{cases} \vartheta^x (1-\vartheta)^{1-x} \text{ pro } x = 0, 1, \\ 0 \text{ jinak.} \end{cases}$$

4.2.2 Binomické rozdělení

Provádíme posloupnost n opakovaných nezávislých pokusů, v každém pokusu může nastat sledovaná událost s pravděpodobností ϑ; jde o tzv. bernoulliovskou posloupnost pokusů. Náhodná veličina X udává počet nastání sledované události v této posloupnosti pokusů. Píšeme $X \sim \mathrm{Bi}(n, \vartheta)$; pro $n = 1$ jde o alternativní rozdělení.

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x} \text{ pro } x = 0, 1, \ldots, n, \\ 0 \text{ jinak.} \end{cases}$$

Binomické rozdělení se pojí s výběry s vracením (s opakováním).

Vzorce pro výpočty pravděpodobností pomocí binomického rozdělení

- Pravděpodobnost, že v n pokusech nastane sledovaná událost právě x-krát:
  $\Pr(X = x) = p(x) = \binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x}$.
  K výpočtu v softwaru R slouží funkce dbinom(x, n, ϑ).
- Pravděpodobnost, že v n pokusech nastane sledovaná událost nejvýše x_1-krát:
  $\Pr(X \leq x_1) = F(x_1) = \sum_{x=0}^{x_1} p(x)$.
  K výpočtu v softwaru R slouží funkce pbinom(x_1, n, ϑ).
- Pravděpodobnost, že v n pokusech nastane sledovaná událost alespoň x_0-krát:
  $\Pr(X \geq x_0) = 1 - \Pr(X \leq x_0 - 1) = 1 - F(x_0 - 1) = 1 - \sum_{x=0}^{x_0-1} p(x)$.
  Výpočet lze v softwaru R provést takto: 1 − pbinom(x_0 − 1, n, ϑ).
- Pravděpodobnost, že v prvních n pokusech nastane sledovaná událost alespoň x_0-krát a nejvýše x_1-krát:
  $\Pr(x_0 \leq X \leq x_1) = F(x_1) - F(x_0 - 1) = \sum_{x=x_0}^{x_1} p(x)$.
  Výpočet lze v softwaru R provést takto: pbinom(x_1, n, ϑ) − pbinom(x_0 − 1, n, ϑ).

Příklad 4.1. Řešený příklad

V rámci studie poměru pohlaví u lidí (Geissler, 1889) bylo na základě záznamů z nemocnic v Sasku zaznamenáno rozdělení počtu chlapců v $M = 6115$ rodinách s dvanácti dětmi. Údaje ze studie jsou uvedeny v tabulce 4.1.

Tabulka 4.1: Počet chlapců v rodinách s dvanácti dětmi

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
$m_{observed}$	3	24	104	286	670	1033	1343	1112	829	478	181	45	7	6115

Předpokládejme, že náhodná veličina X popisuje počet chlapců v rodině s dvanácti dětmi. (a) Najděte rozdělení, které dostatečně dobře vystihuje pravděpodobnostní chování náhodné veličiny X, a odhadněte parametry tohoto rozdělení; (b) ověřte, že nalezené rozdělení je vhodné na popis náhodné veličiny X; vypočítejte očekávané absolutní četnosti za předpokladu nalezeného rozdělení a graficky je porovnejte s pozorovanými absolutními četnostmi uvedenými v tabulce 4.1.

Řešení příkladu 4.1

Počet chlapců v rodině s dvanácti dětmi je diskrétní znak, k jeho popisu tedy použijeme diskrétní náhodnou veličinu. Narození chlapce bylo zkoumáno ve dvanácti Bernoulliho pokusech $X_1, \ldots, X_{12}$, přičemž v každému pokusu mohlo dojít k nastání sledované události ($X_i = 1$; narodil se chlapec), nebo k nenastání sledované události ($X_i = 0$; narodilo se děvče). O náhodné veličině X tedy předpokládáme, že pochází z binomického rozdělení s parametry $n = 12$ a ϑ, kde ϑ je pravděpodobnost narození chlapce v rodině s dvanácti dětmi. Parametr ϑ odhadneme jako podíl počtu všech narozených chlapců ku celkovému počtu všech narozených dětí v rodinách s dvanácti dětmi.

$$\widehat{\vartheta} = \frac{\text{počet narozených chlapců}}{\text{počet narozených dětí}} = \frac{\sum_{x=0}^{n} x m_{observed}}{nM} = \frac{38\,100}{73\,380} = 0,5192.$$

```
n <- 12
x <- 0:n
m.obs <- c(3, 24, 104, 286, 670, 1033, 1343, 1112, 829, 478, 181, 45, 7)
M <- sum(m.obs) # 6115
theta <- round(sum(x * m.obs) / (n * M), 4) # 0,5192
```

Odhad parametru $\widehat{\vartheta} = 0,5192$. Pravděpodobnost narození chlapce v rodině s dvanácti dětmi je 0,5192 (51,92 %). O náhodné veličině X předpokládáme, že pochází z binomického rozdělení s parametry $n = 12$ a $\vartheta = 0,5192$, tj. $X \sim \mathrm{Bi}(12; 0,5192)$.

Nyní zbývá ověřit, zda nalezené binomické rozdělení dostatečně dobře popisuje reálná data. Za předpokladu, že $X \sim \mathrm{Bi}(12; 0,5192)$, vypočítáme očekávané absolutní četnosti rodin s 0, 1, . . . , 12 chlapci. Pomocí příkazu dbinom() zjistíme nejprve pravděpodobnostní funkci rozdělení $\mathrm{Bi}(12; 0,5192)$ v hodnotách 0, 1, . . . , 12. Vstupními argumenty příkazu budou hodnoty 0 až 12 (argument x), parametr n (argument size) a parametr ϑ (argument prob). Hodnoty pravděpodobnostní funkce následně vynásobíme celkovým počtem rodin ($M = 6\,115$) a zaokrouhlíme na celá čísla. Očekávané absolutní četnosti a pozorované absolutní četnosti vložíme po řádcích do jedné souhrnné tabulky pomocí funkcí rbind() a data.frame().

```
m.exp <- round(dbinom(x = 0:12, size = n, prob = theta) * 6115)
tab <- data.frame(rbind(m.obs, m.exp))
names(tab) <- 0:12
```

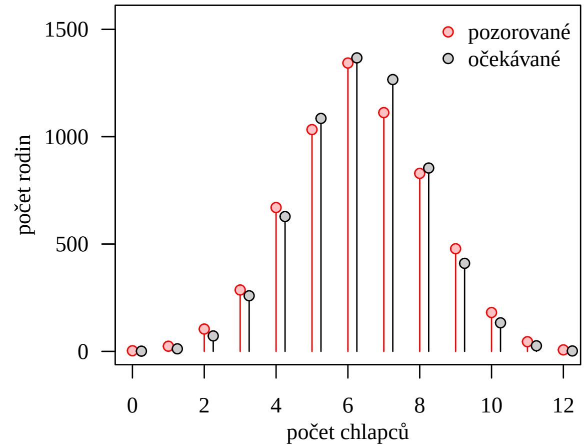
```
      0  1   2   3   4    5    6    7   8   9  10 11 12
m.obs 3 24 104 286 670 1033 1343 1112 829 478 181 45  7
m.exp 1 12  72 259 628 1085 1367 1266 854 410 133 26  2
```

Za předpokladu, že $X \sim \mathrm{Bi}(12; 0,5192)$, se v jedné rodině s dvanácti dětmi nenarodí žádný chlapec, ve dvanácti rodinách se narodí jeden chlapec, v 72 rodinách se narodí dva chlapci, apod.

Pozorované a očekávané absolutní četnosti nyní vzájemně graficky porovnáme. Nejprve příkazem plot() s argumentem type = "h" vykreslíme graf pozorovaných absolutních četností reprezentovaných červenými svislými úsečkami. Příkazem points() zakončíme svislé úsečky červenými body. Následně pomocí funkce lines() s argumentem type = "h" dokreslíme do grafu svislé černé úsečky reprezentující očekávané absolutní četnosti. Pro lepší přehlednost posuneme tyto úsečky o vzdálenost 0, 25 směrem doprava. Úsečky zakončíme šedými body. Nakonec do grafu doplníme legendu příkazem legend(). Položky legendy zobrazíme ve tvaru kulatých bodů s obrysem a výplní (argument pch = 21). Barvy obrysů bodů nastavíme argumentem col, barvy výplní argumentem pt.bg. Výsledný graf je zobrazen na obrázku 4.1.

```
plot(x, m.obs, type = "h", las = 1, col = "red", ylim = c(0, 1550), xlab = "počet
    chlapců", ylab = "počet rodin")
points(x, m.obs, pch = 21, col = "red", bg = "rosybrown1")
lines (x + 0.25, m.exp, type = "h", col = "black")
points(x + 0.25, m.exp, pch = 21, col = "black", bg = "grey80")
legend("topright", pch = c(21, 21), col = c("red", "black"), pt.bg = c("rosybrown1",
    "grey80"), legend = c("pozorované", "očekávané"), bty = "n")
```

Z obrázku 4.1 vidíme, že pozorované a očekávané absolutní četnosti jsou si hodnotami velmi blízké. Grafická vizualizace tedy podporuje náš závěr, že náhodná veličina X popisující počet chlapců v rodině s dvanácti dětmi pochází



Obrázek 4.1: Porovnání pozorovaných absolutních četností a očekávaných absolutních četností za předpokladu rozdělení $\mathrm{Bi}(12; 0,5192)$

z binomického rozdělení s parametry $n = 12$ a $\vartheta = 0,5192$. ★

Příklad 4.2. Řešený příklad

Za předpokladu, že náhodná veličina X popisující počet chlapců v rodině s dvanácti dětmi pochází z rozdělení $\mathrm{Bi}(12; 0,5192)$, (a) nakreslete graf pravděpodobnostní funkce $p(x)$ a graf distribuční funkce $F(x)$; (b) vypočítejte pravděpodobnost, že v rodině s dvanácti dětmi bude (i) právě sedm chlapců; (ii) nejvýše čtyři chlapci; (iii) alespoň šest chlapců; (iv) tři, čtyři, pět nebo šest chlapců.

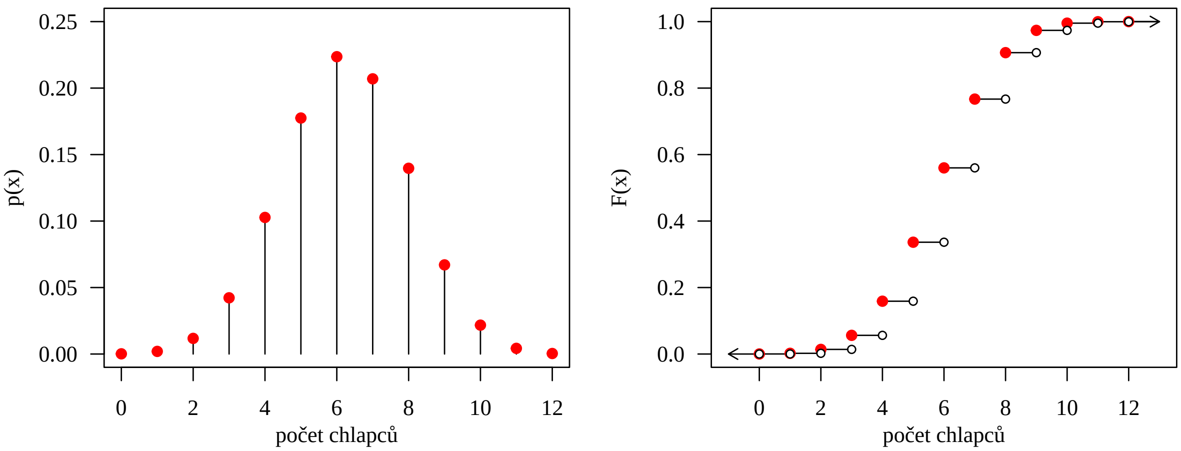
Řešení příkladu 4.2

K vykreslení grafu pravděpodobnostní funkce $p(x)$ nejprve příkazem dbinom() vypočítáme hodnoty pravděpodobnostní funkce v bodech $x = 0, 1, \ldots, 12$. Příkazem plot() s argumentem type = "h" potom vykreslíme hodnoty pravděpodobnostní funkce reprezentované svislými černými úsečkami. Svislé úsečky zakončíme červenými body. Výsledný graf je zobrazen na obrázku 4.2 vlevo.

```
n <- 12; theta <- 0.5192
x <- 0:n
px <- dbinom(x, size = n, prob = theta)
plot(x, px, type = "h", las = 1, ylim = c(0, 0.25), xlab = "počet chlapců", ylab =
    "p(x)")
points(x, px, pch = 19, col = "red")
```

K vykreslení grafu distribuční funkce $F(x)$ nejprve příkazem pbinom() vypočítáme hodnoty distribuční funkce v bodech $x = 0, 1, \ldots, 12$. Vstupními argumenty příkazu budou hodnoty 0 až 12 (argument q), parametr n (argument size) a parametr ϑ (argument prob). Následně příkazem plot() s argumentem type = "n" vykresíme prázdný graf, ve kterém explicitně nastavíme rozsah měřítka osy x od -1 do 13 (argument xlim) a rozsah měřítka osy y od 0 do 1 (argument ylim). Do prázdného grafu zaneseme vodorovné úsečky, které začínají v bodech posloupnosti x a jejichž výšky odpovídají hodnotám distribuční funkce $F(x)$. Úsečky vykreslíme příkazem segments(x0, y0, x1, y1), kde x0, resp. y0 je vektor x-ových, resp. y-ových souřadnic počátečních bodů úseček a x1, resp. y1 je vektor x-ových, resp. y-ových souřadnic koncových bodů úseček. Dále příkazem arrows() dokreslíme do grafu dvě šipky, z nichž první vysvětluje, že na intervalu $(-\infty; 0)$ je $F(x) = 0$, a druhá, že na intervalu $\langle 12; \infty)$ je $F(x) = 1$. Nakonec příkazem points() doplníme ke každé úsečce zleva plný červený bod reprezentující, že úsečka je zleva uzavřená, a zprava bílý bod s černým obrysem reprezentující, že úsečka je zprava otevřená. Pro lepší rozlišení bodů v situacích, kdy hodnoty distribuční funkce v po sobě následujících bodech si jsou blízké, zmenšíme velikost bílého bodu na 0,8násobek původní velikosti. Výsledný graf je zobrazen na obrázku 4.2 vpravo.

```
Fx <- pbinom(q = x, size = n, prob = theta)
plot(x, Fx, type = "n", las = 1, xlim = c(-1, 13), ylim = c(0, 1), xlab = "počet
    chlapců", ylab = "F(x)")
segments(x0 = x, y0 = Fx, x1 = x + 1, y1 = Fx)
arrows(x0 = 0, y0 = 0, x1 = -1, y1 = 0, length = 0.1)
arrows(x0 = 12, y0 = 1, x1 = 13, y1 = 1, length = 0.1)
points(x, Fx, pch = 19, col = "red")
points(x, c(0, Fx[1:12]), pch = 21, col = "black", bg = "white", cex = 0.8)
```



Obrázek 4.2: Graf pravděpodobnostní funkce $p(x)$ (vlevo); graf distribuční funkce $F(x)$ (vpravo) rozdělení $\mathrm{Bi}(12; 0,5192)$

Nyní se zaměříme na výpočet pravděpodobností za předpokladu binomického rozdělení s parametry $n = 12$ a $\vartheta = 0,5192$. Pravděpodobnost, že v rodině s dvanácti dětmi bude právě sedm chlapců, tj. $\Pr(X = 7)$ odpovídá hodnotě pravděpodobnostní funkce $p(x)$ rozdělení $\mathrm{Bi}(12; 0,5192)$ v bodě $x = 7$. Tuto hodnotu vypočítáme příkazem dbinom().

```
dbinom(x = 7, size = n, prob = theta) # 0,2069618
```

Pravděpodobnost, že v rodině s dvanácti dětmi budou nejvýše čtyři chlapci, tj. $\Pr(X \leq 4)$ odpovídá hodnotě distribuční funkce $F(x)$ v bodě $x = 4$. Tuto hodnotu vypočítáme příkazem pbinom().

```
pbinom(q = 4, size = n, prob = theta) # 0,1588736
```

Pravděpodobnost, že v rodině s dvanácti dětmi bude alespoň šest chlapců, tj. $\Pr(X \geq 6)$ vypočítáme tak, že od jedné odečteme pravděpodobnost, že v rodině bude nejvýše pět chlapců. Tuto pravděpodobnost, odpovídající hodnotě distribuční funkce $F(x)$ v bodě $x = 5$, vypočítáme příkazem pbinom().

```
1 - pbinom(q = 5, size = n, prob = theta) # 0,6636462
```

Pravděpodobnost, že v rodině s dvanácti dětmi budou tři, čtyři, pět nebo šest chlapců, tj. $\Pr(3 \leq X \leq 6)$ můžeme vypočítat dvěma způsoby. Prvním způsobem je, že sečteme hodnoty pravděpodobnostní funkce $p(x)$ v bodech $x = 3$, 4, 5 a 6. Tyto hodnoty vypočítáme příkazem dbinom() a sečteme příkazem sum(). Druhým způsobem je, že od pravděpodobnosti, že v rodině bude nejvýše šest chlapců, odečteme pravděpodobnost, že v rodině budou nejvýše dva chlapci. Obě pravděpodobnosti jsou hodnotami distribuční funkce $F(x)$ v bodě $x = 6$, resp. v bodě $x = 2$ a vypočítáme je příkazem pbinom().

```
sum(dbinom(x = 3:6, size = n, prob = theta)) # 0,546076
pbinom(q = 6, size = n, prob = theta) - pbinom(q = 2, size = n, prob = theta) # 0,546076
```

Pravděpodobnost, že v rodině s dvanácti dětmi bude právě sedm chlapců, je 0,2070 (20,70 %). Pravděpodobnost, že v rodině s dvanácti dětmi budou nejvýše čtyři chlapci, je 0,1589 (15,89 %). Pravděpodobnost, že v rodině s dvanácti dětmi bude alespoň šest chlapců, je 0,6636 (66,36 %). Pravděpodobnost, že v rodině s dvanácti dětmi budou tři, čtyři, pět nebo šest chlapců, je 0,5461 (54,61 %). ★

Příklad 4.3. Neřešený příklad
V rámci studie poměru pohlaví u lidí (Geissler, 1889) bylo na základě záznamů z nemocnic v Sasku zaznamenáno rozdělení počtu dívek v $M = 6115$ rodinách s dvanácti dětmi. Údaje ze studie jsou uvedeny v tabulce 4.2.

Tabulka 4.2: Počet dívek v rodinách s dvanácti dětmi

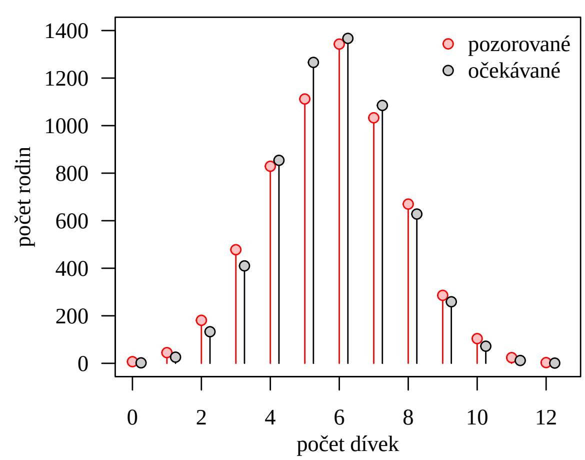
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
$m_{observed}$	7	45	181	478	829	1112	1343	1033	670	286	104	24	3	6115

Předpokládejme, že náhodná veličina X popisuje počet dívek v rodině s dvanácti dětmi. (a) Najděte rozdělení, které dostatečně dobře vystihuje pravděpodobnostní chování náhodné veličiny X, a odhadněte parametry tohoto rozdělení; (b) ověřte, že nalezené rozdělení je vhodné na popis náhodné veličiny X; vypočítejte očekávané absolutní četnosti za předpokladu nalezeného rozdělení a graficky je porovnejte s pozorovanými absolutními četnostmi uvedenými v tabulce 4.2.

Výsledky: (a) $X \sim \mathrm{Bi}(12; 0,4808)$; (b) očekávané absolutní četnosti viz tabulka 4.3; grafické porovnání pozorovaných a očekávaných absolutních četností viz obrázek 4.3.

Tabulka 4.3: Očekávaný počet dívek v rodinách s dvanácti dětmi

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
$m_{expected}$	2	26	133	410	854	1266	1367	1085	628	259	72	12	1	6115



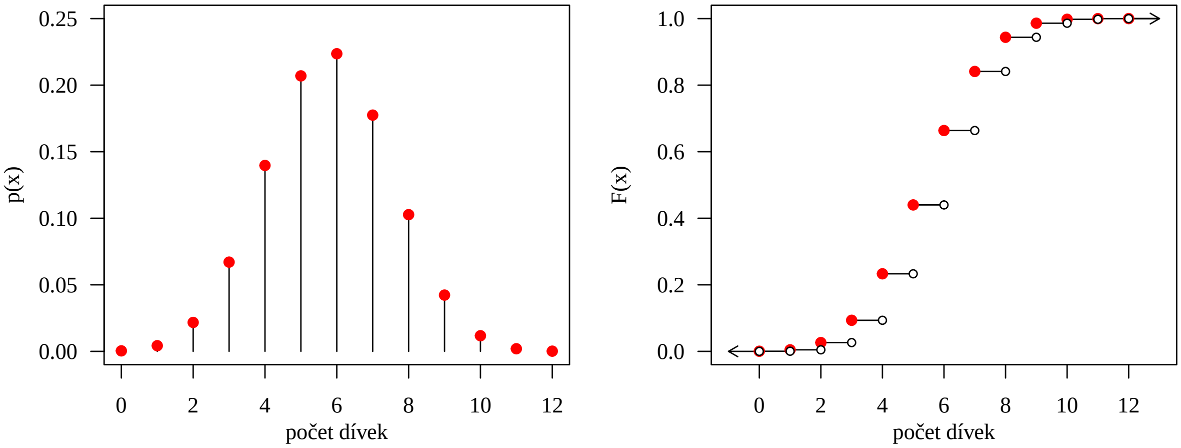
Obrázek 4.3: Porovnání pozorovaných absolutních četností a očekávaných absolutních četností za předpokladu rozdělení $\mathrm{Bi}(12; 0,4808)$

★

Příklad 4.4. Neřešený příklad
Za předpokladu, že náhodná veličina X popisující počet dívek v rodině s dvanácti dětmi pochází z rozdělení $\mathrm{Bi}(12; 0,4808)$, (a) nakreslete graf pravděpodobnostní funkce $p(x)$ a graf distribuční funkce $F(x)$; (b) vypočítejte pravděpodobnost, že v rodině s dvanácti dětmi bude (i) šest až jedenáct dívek; (ii) alespoň osm dívek; (iii) právě čtyři dívky; (iv) nejvýše tři dívky.

Výsledky: (a) graf pravděpodobnostní funkce $p(x)$ viz obrázek 4.4 vlevo, graf distribuční funkce $F(x)$ viz obrázek 4.4 vpravo; (b-i) $\Pr(6 \leq X \leq 11) = 0,5598$; (b-ii) $\Pr(X \geq 8) = 0,1589$; (b-iii) $\Pr(X = 4) = 0,1397$; (b-iv) $\Pr(X \leq 3) = 0,0934$.

★



Obrázek 4.4: Graf pravděpodobnostní funkce $p(x)$ (vlevo); graf distribuční funkce $F(x)$ (vpravo) rozdělení $\mathrm{Bi}(12; 0,4808)$

4.2.3 Hypergeometrické rozdělení

V souboru N prvků je M prvků označeno. Náhodně vybereme k prvků bez vracení. Náhodná veličina X udává počet vybraných označených prvků. Píšeme $X \sim \mathrm{Hg}(N, M, k)$.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{k-x}}{\binom{N}{k}} \text{ pro } x = \max\{0, M-N+k\}, \dots, \min\{M, k\}, \\ 0 \text{ jinak.} \end{cases}$$

Hypergeometrické rozdělení se pojí s výběry bez vracení (bez opakování).

Vzorce pro výpočty pravděpodobností pomocí hypergeometrického rozdělení

- Pravděpodobnost, že ve výběru je právě x označených prvků:
  $\Pr(X = x) = p(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{k-x}}{\binom{N}{k}}$.
  K výpočtu v softwaru R slouží funkce `dhyper(x, m, n, k)`, kde
  - x ... počet označených prvků ve výběru,
  - m ... počet označených prvků v souboru ($m = M$),
  - n ... počet neoznačených prvků v souboru ($n = N - M$),
  - k ... počet prvků ve výběru.
- Pravděpodobnost, že ve výběru je nejvýše x_1 označených prvků:
  $\Pr(X \leq x_1) = \sum_{x=\max\{0,M-N+k\}}^{x_1} p(x)$.
  K výpočtu v softwaru R slouží funkce `phyper(x1, m, n, k)`.
- Pravděpodobnost, že ve výběru je alespoň x_0 označených prvků:
  $\Pr(X \geq x_0) = 1 - \Pr(X \leq x_0 - 1) = 1 - F(x_0 - 1) = 1 - \sum_{x=\max\{0,M-N+k\}}^{x_0-1} p(x)$.
  Výpočet lze v softwaru R provést takto: `1 - phyper(x0 - 1, m, n, k)`.
- Pravděpodobnost, že ve výběru je alespoň x_0 a nejvýše x_1 označených prvků:
  $\Pr(x_0 \leq X \leq x_1) = F(x_1) - F(x_0 - 1) = \sum_{x=x_0}^{x_1} p(x)$.
  Výpočet lze v softwaru R provést takto: `phyper(x1, m, n, k) - phyper(x0 - 1, m, n, k)`.

Příklad 4.5. Řešený příklad

Podle údajů o počtu obyvatelstva v ČR získaných z webových stránek Českého statistického úřadu (www.czso.cz) měl Jihomoravský kraj ke dni 31. 12. 2019 celkem 1 191 989 obyvatel. Rozmístění obyvatel v jednotlivých okresech Jihomoravského kraje je k dispozici v tabulce 4.4.

Tabulka 4.4: Počet obyvatel v okresech Jihomoravského kraje k datu 31. 12. 2019

Okres	Blansko	Brno-město	Brno-venkov	Břeclav	Hodonín	Vyškov	Znojmo	$\sum$
Počet obyvatel	109 136	381 346	224 642	116 291	153 943	92 280	114 351	1 191 989

Předpokládejme, že chceme sestavit reprezentativní vzorek 10 obyvatel pocházejících z Jihomoravského kraje a že náhodná veličina X popisuje počet obyvatel z okresu Brno-venkov v reprezentativním vzorku. (a) Najděte rozdělení, které dostatečně dobře vystihuje pravděpodobnostní chování náhodné veličiny X, a odhadněte parametry tohoto rozdělení; (b) nakreslete graf pravděpodobnostní funkce $p(x)$ a graf distribuční funkce $F(x)$.

Řešení příkladu 4.5

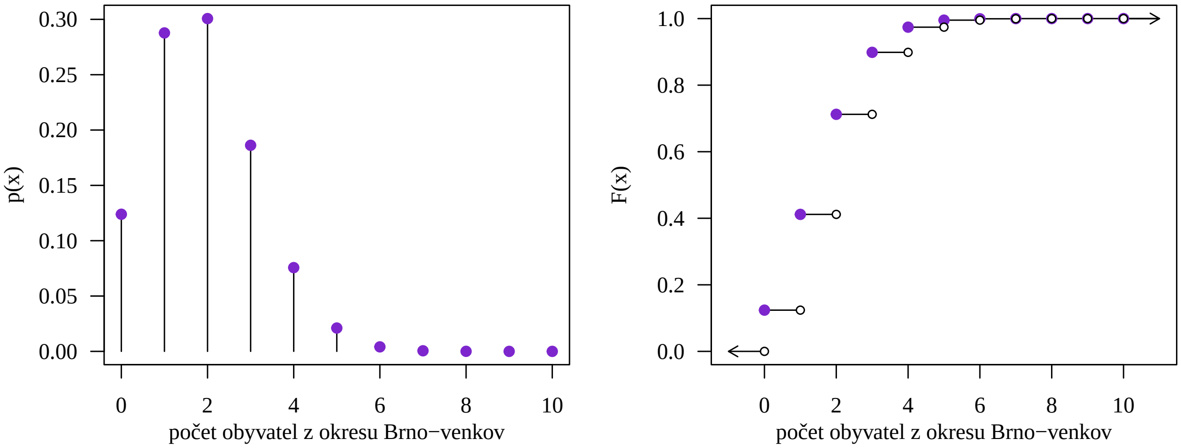
Z datové tabulky 4.4 vidíme, že v celém Jihomoravském kraji bylo k datu 31. 12. 2019 evidováno celkem $N = 1\,191\,989$ obyvatel, z nichž $M = 224\,642$ obyvatel pocházelo z okresu Brno-venkov. Z celého Jihomoravského kraje vybíráme (bez vracení) reprezentativní vzorek $k = 10$ obyvatel. Náhodná veličina X popisující počet obyvatel z okresu Brno-venkov v reprezentativním vzorku 10 obyvatel potom pochází z hypergeometrického rozdělení s parametry N, M a k, tj. $X \sim \mathrm{Hg}(1\,191\,989, 224\,642, 10)$.

K vykreslení grafu pravděpodobnostní funkce $p(x)$ nejprve příkazem dhyper() vypočítáme hodnoty funkce $p(x)$ v bodech $x = 0, 1, \ldots, 10$. Vstupními argumenty příkazu budou hodnoty 0 až 10 (argument x), počet obyvatel z okresu Brno-venkov (argument m), počet obyvatel z libovolného jiného okresu Jihomoravského kraje než je okres Brno-venkov (argument n) a rozsah reprezentativního vzorku (argument k). Hodnoty pravděpodobnostní funkce zaznamenáme do grafu jako svislé úsečky, které následně zakončíme fialovými body. Výsledný graf je zobrazen na obrázku 4.5 vlevo.

```
N <- 1191989
M <- 224642
k <- 10
x <- 0:k
px <- dhyper(x = x, m = M, n = N - M, k = k)
plot(x, px, type = "h", las = 1, xlab = "počet obyvatel z okresu Brno-venkov", ylab =
    "p(x)")
points(x, px, pch = 19, col = "purple3")
```

K vykreslení grafu distribuční funkce $F(x)$ nejprve příkazem phyper() vypočítáme hodnoty funkce $F(x)$ v bodech $x = 0, 1, \ldots, 10$. Vstupními argumenty příkazu budou opět hodnoty 0 až 10 (argument q), počet obyvatel z okresu Brno-venkov (argument m), počet obyvatel z libovolného jiného okresu než je okres Brno-venkov (argument n) a rozsah reprezentativního vzorku (argument k). Následně si připravíme prázdný graf s rozsahem měřítka osy x od -1 do 11 a s rozsahem měřítka osy y od 0 do 1. Do prázdného grafu zaneseme vodorovné úsečky, jejichž výšky v bodech posloupnosti x odpovídají hodnotám distribuční funkce $F(x)$. Do grafu dokreslíme šipky reprezentující průběh distribuční funkce na intervalech $(-\infty; 0)$ a $\langle 10; \infty)$. Nakonec každou úsečku vizuálně zleva uzavřeme prostřednictvím plného fialového bodu a zprava otevřeme prostřednictvím bílého bodu s černým obrysem. Výsledný graf distribuční funkce $F(x)$ je zobrazen na obrázku 4.5 vpravo.

```
Fx <- phyper(q = x, m = M, n = N - M, k = k)
plot(x, Fx, type = "n", las = 1, xlim = c(-1, 11), ylim = c(0, 1), xlab = "počet
    obyvatel z okresu Brno-venkov", ylab = "F(x)")
segments(x0 = x, y0 = Fx, x1 = x + 1, y1 = Fx)
arrows(x0 = 0, y0 = 0, x1 = -1, y1 = 0, length = 0.1)
arrows(x0 = 10, y0 = 1, x1 = 11, y1 = 1, length = 0.1)
points(x, Fx, pch = 19, col = "purple3")
points(x, c(0, Fx[1:10]), pch = 21, col = "black", bg = "white", cex = 0.8)
```



Obrázek 4.5: Graf pravděpodobnostní funkce $p(x)$ (vlevo); graf distribuční funkce $F(x)$ (vpravo) rozdělení $\mathrm{Hg}(1\,191\,989, 224\,642, 10)$

★

Příklad 4.6. Řešený příklad

Za předpokladu, že náhodná veličina X popisující počet obyvatel z okresu Brno-venkov v reprezentativním vzorku 10 obyvatel z Jihomoravského kraje pochází z rozdělení $\mathrm{Hg}(1\,191\,989, 224\,642, 10)$, vypočítejte pravděpodobnost, že v reprezentativním vzorku bude z okresu Brno-venkov (a) právě jeden obyvatel; (b) nejvýše dva obyvatelé; (c) alespoň sedm obyvatel; (d) pět až osm obyvatel.

Řešení příkladu 4.6

Pravděpodobnost, že v reprezentativním vzorku 10 obyvatel Jihomoravského kraje bude z okresu Brno-venkov právě jeden obyvatel, tj. $\Pr(X = 1)$ odpovídá hodnotě pravděpodobnostní funkce $p(x)$ rozdělení $\mathrm{Hg}(1\,191\,989, 224\,642, 10)$ v bodě $x = 1$. Tuto hodnotu vypočítáme příkazem dhyper().

```
N <- 1191989; M <- 224642; k <- 10
dhyper(x = 1, m = M, n = N - M, k = k) # 0,287746
```

Pravděpodobnost, že v reprezentativním vzorku 10 obyvatel Jihomoravského kraje budou z okresu Brno-venkov nejvýše dva obyvatelé, tj. $\Pr(X \leq 2)$ odpovídá hodnotě distribuční funkce $F(x)$ v bodě $x = 2$. Tuto hodnotu vypočítáme příkazem phyper().

```
phyper(q = 2, m = M, n = N - M, k = k) # 0,7123524
```

Pravděpodobnost, že v reprezentativním vzorku 10 obyvatel Jihomoravského kraje bude z okresu Brno-venkov alespoň sedm obyvatel, tj. $\Pr(X \geq 7)$ vypočítáme tak, že od jedné odečteme pravděpodobnost, že v reprezentativním vzorku bude z okresu Brno-venkov nejvýše šest obyvatel. Tuto pravděpodobnost, odpovídající hodnotě distribuční funkce $F(x)$ v bodě $x = 6$, vypočítáme příkazem phyper().

```
1 - phyper(q = 6, m = M, n = N - M, k = k) # 0,0005911696
```

Pravděpodobnost, že v reprezentativním vzorku 10 obyvatel Jihomoravského kraje bude z okresu Brno-venkov pět až osm obyvatel, tj. $\Pr(5 \leq X \leq 8)$ můžeme vypočítat dvěma způsoby. Prvním způsobem je, že sečteme hodnoty pravděpodobnostní funkce $p(x)$ v bodech $x = 5$, 6, 7 a 8. Tyto hodnoty vypočítáme příkazem dhyper(). Druhým způsobem je, že od pravděpodobnosti, že v reprezentativním vzorku bude z okresu Brno-venkov nejvýše osm obyvatel, odečteme pravděpodobnost, že v reprezentativním vzorku budou z okresu Brno-venkov nejvýše čtyři obyvatelé. Obě pravděpodobnosti jsou hodnotami distribuční funkce $F(x)$ v bodě $x = 8$, resp. v bodě $x = 4$ a vypočítáme je příkazem phyper().

```
sum(dhyper(x = 5:8, m = M, n = N - M, k = k)) # 0,02575766
phyper(q = 8, m = M, n = N - M, k = k) - phyper(q = 4, m = M, n = N - M, k = k) #
    0,02575766
```

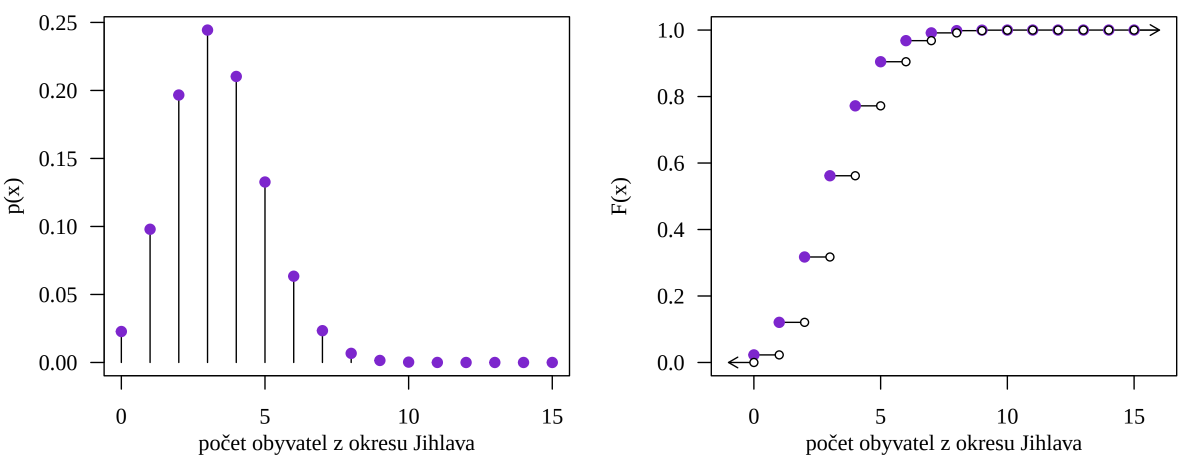
Pravděpodobnost, že v reprezentativním vzorku 10 obyvatel Jihomoravského kraje bude z okresu Brno-venkov právě jeden obyvatel, je $0,2877$ ($28,77\,\%$). Pravděpodobnost, že v reprezentativním vzorku budou z okresu Brno-venkov nejvýše dva obyvatelé, je $0,7124$ ($71,24\,\%$). Pravděpodobnost, že v reprezentativním vzorku bude z okresu Brno-venkov alespoň sedm obyvatel, je $0,0006$ ($0,06\,\%$). Pravděpodobnost, že v reprezentativním vzorku bude z okresu Brno-venkov pět až osm obyvatel, je $0,0258$ ($2,58\,\%$). ★

Příklad 4.7. Neřešený příklad
Podle údajů o počtu obyvatelstva v ČR získaných z webových stránek Českého statistického úřadu (www.czso.cz) měl kraj Vysočina ke dni 31. 12. 2019 celkem 509 813 obyvatel. Rozmístění obyvatel v jednotlivých okresech kraje Vysočina je k dispozici v tabulce 4.5.

Tabulka 4.5: Počet obyvatel v okresech kraje Vysočina k datu 31. 12. 2019

Okres	Havlíčkův Brod	Jihlava	Pelhřimov	Třebíč	Žďár nad Sázavou	$\sum$
Počet obyvatel	94 915	113 628	72 302	110 810	118 158	509 813

Předpokládejme, že chceme sestavit reprezentativní vzorek 15 obyvatel pocházejících z kraje Vysočina a že náhodná veličina X popisuje počet obyvatel z okresu Jihlava v reprezentativním vzorku. (a) Najděte rozdělení, které dostatečně dobře vystihuje pravděpodobnostní chování náhodné veličiny X, a odhadněte parametry tohoto rozdělení; (b) nakreslete graf pravděpodobnostní funkce $p(x)$ a graf distribuční funkce $F(x)$.
Výsledky: (a) $X \sim \mathrm{Hg}(509\,813, 113\,628, 15)$; (b) graf pravděpodobnostní funkce $p(x)$ viz obrázek 4.6 vlevo, graf distribuční funkce $F(x)$ viz obrázek 4.6 vpravo.



Obrázek 4.6: Graf pravděpodobnostní funkce $p(x)$ (vlevo); graf distribuční funkce $F(x)$ (vpravo) rozdělení $\mathrm{Hg}(509\,813, 113\,628, 15)$

★

Příklad 4.8. Neřešený příklad
Za předpokladu, že náhodná veličina X popisující počet obyvatel z okresu Jihlava v reprezentativním vzorku 15 obyvatel z kraje Vysočina pochází z rozdělení $\mathrm{Hg}(509\,813, 113\,628, 15)$, vypočítejte pravděpodobnost, že v reprezentativním vzorku bude z okresu Jihlava (a) nejvýše pět obyvatel; (b) právě tři obyvatelé; (c) čtyři až devět obyvatel; (d) alespoň jeden obyvatel.
Výsledky: (a) $\Pr(X \leq 5) = 0,9047$; (b) $\Pr(X = 3) = 0,2444$; (c) $\Pr(4 \leq X \leq 9) = 0,4380$; (d) $\Pr(X \geq 1) = 0,9772$.

★

4.2.4 Poissonovo rozdělení

Náhodná veličina X udává počet sledovaných událostí, které nastanou v jednotkovém časovém intervalu (resp. jednotkové oblasti), přičemž události nastávají náhodně, jednotlivě a vzájemně nezávisle. Parametr $\lambda > 0$ je střední hodnota počtu těchto událostí. Píšeme $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$.

$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \text{ pro } x = 0, 1, \dots, \\ 0 \text{ jinak.} \end{cases}$

Vzorce pro výpočty pravděpodobností pomocí Poissonova rozdělení

- Pravděpodobnost, že nastane právě x sledovaných událostí:
  $\Pr(X = x) = p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$.
  K výpočtu v softwaru R slouží funkce dpois(x, λ).

- Pravděpodobnost, že nastane nejvýše x_1 sledovaných událostí:
  $\Pr(X \leq x_1) = F(x_1) = \sum_{x=0}^{x_1} p(x)$.
  K výpočtu v softwaru R slouží funkce ppois(x_1, λ).

- Pravděpodobnost, že nastane alespoň x_0 sledovaných událostí:
  $\Pr(X \geq x_0) = 1 - \Pr(X \leq x_0 - 1) = 1 - F(x_0 - 1) = 1 - \sum_{x=0}^{x_0-1} p(x)$.
  Výpočet lze v softwaru R provést takto: 1 − ppois(x_0 − 1, λ).

- Pravděpodobnost, že nastane alespoň x_0 a nejvýše x_1 sledovaných událostí:
  $\Pr(x_0 \leq X \leq x_1) = F(x_1) - F(x_0 - 1) = \sum_{x=x_0}^{x_1} p(x)$.
  Výpočet lze v softwaru R provést takto: ppois(x_1, λ) − ppois(x_0 − 1, λ).

Upozornění: Je-li počet pokusů n v bernoulliovské posloupnosti pokusů alespoň 30 a pravděpodobnost úspěchu ϑ v jednom pokusu je nejvýše $0,1$, lze pravděpodobnostní funkci rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \vartheta)$ nahradit pravděpodobnostní funkcí rozdělení $\mathrm{Po}(\lambda)$, kde $\lambda = n\vartheta$.

Příklad 4.9. Řešený příklad
V rámci studie (von Bortkiewicz, 1898) byly zpracovány počty smrtelných úrazů v pruských armádních jednotkách způsobené kopnutím koněm. Údaje o smrtelných úrazech po kopnutí koněm by zaznamenávány po dobu dvaceti let u deseti armádních jednotek ($M = 200$; 10 jednotek $\times$ 20 let). Počty úrazů v každé jednotce za toto období jsou uvedeny v tabulce 4.6.

Tabulka 4.6: Počet smrtelných úrazů v důsledku kopnutí koněm v pruských armádních jednotkách

x	0	1	2	3	4	5+	$\sum$
$m_{observed}$	109	65	22	3	1	0	200

Předpokládejme, že náhodná veličina X popisuje počet smrtelných úrazů v důsledku kopnutí koněm v jedné pruské armádní jednotce. (a) Najděte rozdělení, které dostatečně dobře vystihuje pravděpodobnostní chování náhodné veličiny X, a odhadněte parametry tohoto rozdělení; (b) ověřte, že nalezené rozdělení je vhodné na popis náhodné veličiny X; vypočítejte očekávané absolutní četnosti za předpokladu nalezeného rozdělení a graficky je porovnejte s pozorovanými absolutními četnostmi uvedenými v tabulce 4.6.

Řešení příkladu 4.9
Počet smrtelných úrazů v jedné armádní jednotce je diskrétní znak, k jeho popisu tedy použijeme diskrétní náhodnou veličinu. Všimněme si, že sloupec s názvem 5+ v tabulce 4.6 uvádí počet armádních jednotek, ve kterých došlo k pěti a více úrazům. Počet úrazů tedy není shora nijak omezen. O náhodné veličině X tedy předpokládáme, že pochází z Poissonova rozdělení s parametrem λ, kde λ je střední počet smrtelných úrazů v jedné armádní jednotce. Hodnotu parametru λ odhadneme jako podíl počtu všech smrtelných úrazů ku celkovému počtu všech armádních jednotek.

$$\widehat{\lambda} = \frac{\text{počet smrtelných úrazů}}{\text{počet armádních jednotek}} = \frac{\sum_{x=0}^{n} x m_{observed}}{M} = \frac{122}{200} = 0,61.$$

```
x <- 0:5
m.obs <- c(109, 65, 22, 3, 1, 0)
M <- sum(m.obs) # 200
lambda <- sum(x * m.obs) / M # 0,61
```

Odhad parametru $\widehat{\lambda} = 0,61$. Střední počet smrtelných úrazů v důsledku kopnutí koněm v jedné pruské armádní jednotce je $0,61$. O náhodné veličině X předpokládáme, že pochází z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda = 0,61$, tj. $X \sim \mathrm{Po}(0,61)$.

Nyní zbývá ověřit, zda nalezené Poissonovo rozdělení dostatečně dobře popisuje reálná data. Za předpokladu, že $X \sim \mathrm{Po}(0,61)$, vypočítáme očekávané absolutní četnosti armádních jednotek, ve kterých došlo k 0, 1, 2, 3, 4 a 5+ smrtelným úrazům. Pomocí příkazu dpois() vypočítáme nejprve pravděpodobnosti, že v jedné armádní jednotce došlo k 0, 1, 2, 3 a 4 úrazům. Vstupními argumenty příkazu budou hodnoty 0 až 4 (argument x) a parametr λ (argument lambda). Dále vypočítáme pravděpodobnost, že v jedné armádní jednotce došlo k pěti a více úrazům, a to tak, že od 1 odečteme pravděpodobnost, že došlo k 0 až 4 úrazům. Získané pravděpodobnosti vynásobíme počtem armádních jednotek ($M = 200$) a zaokrouhlíme na celá čísla. Očekávané absolutní četnosti vložíme společně s pozorovanými absolutními četnostmi do souhrnné tabulky.

```
m.exp <- round(c(dpois(x = 0:4, lambda = lambda), 1 - sum(dpois(x = 0:4, lambda =
    lambda))) * M)
tab <- data.frame(rbind(m.obs, m.exp))
names(tab) <- c(0:4, "5+")
```

```
        0  1  2 3 4 5+
m.obs 109 65 22 3 1  0
m.exp 109 66 20 4 1  0
```

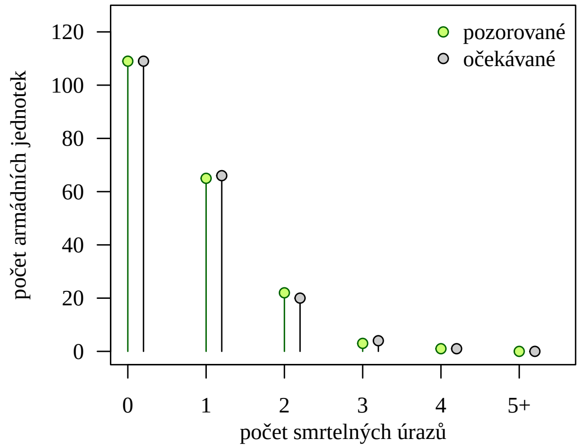
Za předpokladu, že $X \sim \mathrm{Po}(0,61)$, nedojde ve 109 armádních jednotkách k žádnému smrtelnému úrazu v důsledku kopnutí koněm, v 66 jednotkách dojde k jednomu smrtelnému úrazu, ve 20 jednotkách dojde ke dvěma smrtelným úrazům, apod.

Pozorované a očekávané absolutní četnosti nyní vzájemně graficky porovnáme. Příkazem plot() s argumentem type = "h" vykreslíme graf s pozorovanými absolutními četnostmi reprezentovanými svislými zelenými úsečkami. Argumentem axes = F zakážeme vykreslení měřítka osy x a osy y. Obě měřítka doplníme do grafu zvlášť příkazem axis(). Popisky měřítka osy x budou $0, 1, \ldots, 5+$. Svislé zelené úsečky zakončíme zelenými body. Dále do grafu dokresíme svislé černé úsečky zakončené šedými body reprezentující očekávané absolutní četnosti, a to ve vzdálenosti $0,2$ směrem vpravo od úseček a bodů reprezentujících pozorované absolutní četnosti. Nakonec do grafu doplníme legendu. Výsledný graf je zobrazen na obrázku 4.7.

```
plot(x, m.obs, type = "h", axes = F, col = "darkgreen", xlim = c(0, 5.5), ylim = c(0,
    125), xlab = "počet smrtelných úrazů", ylab = "počet armádních jednotek")
box(bty = "o")
axis(side = 1, at = x, labels = c(0:4, "5+"))
axis(side = 2, las = 1)
points(x, m.obs, pch = 21, col = "darkgreen", bg = "darkolivegreen1")
lines (x + 0.2, m.exp, type = "h", col = "black")
points(x + 0.2, m.exp, pch = 21, col = "black", bg = "grey80")
legend("topright", pch = c(21, 21), col = c("darkgreen", "black"), pt.bg =
    c("darkolivegreen1", "grey80"), legend = c("pozorované", "očekávané"), bty = "n")
```

Z obrázku 4.7 vidíme, že pozorované a očekávané absolutní četnosti jsou téměř identické. Grafická vizualizace tedy podporuje náš závěr, že náhodná veličina X popisující počet smrtelných úrazů v důsledku kopnutí koněm v jedné pruské armádní jednotce pochází z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda = 0,61$. ★

Příklad 4.10. Řešený příklad
Za předpokladu, že náhodná veličina X popisující počet smrtelných úrazů v důsledku kopnutí koněm v jedné pruské armádní jednotce pochází z rozdělení $\mathrm{Po}(0,61)$, (a) nakreslete graf pravděpodobnostní funkce $p(x)$ a graf distribuční funkce $F(x)$; (b) vypočítejte pravděpodobnost, že v jedné armádní jednotce dojde (i) k právě dvěma smrtelným



Obrázek 4.7: Porovnání pozorovaných absolutních četností a očekávaných absolutních četností za předpokladu rozdělení Po(0, 61)

úrazům; (ii) k nejvýše jednomu smrtelnému úrazu; (iii) k alespoň třem smrtelným úrazům; (iv) ke dvěma nebo třem smrtelným úrazům.

Řešení příkladu 4.10

K vykreslení grafu pravděpodobnostní funkce $p(x)$ nejprve příkazem dpois() vypočítáme hodnoty pravděpodobnostní funkce v bodech $x = 0, 1, \ldots, 5$. Graf pravděpodobnostní funkce (viz obrázek 4.8 vlevo) vykreslíme analogicky jako v příkladech 4.2 a 4.5.

```
x <- 0:5; lambda <- 0.61
px <- dpois(x = x, lambda = lambda)
plot(x, px, type = "h", las = 1, ylim = c(0, 0.6), xlab = "počet smrtelných úrazů",
    ylab = "p(x)")
points(x, px, pch = 19, col = "green4")
```

K vykreslení grafu distribuční funkce $F(x)$ nejprve příkazem ppois() vypočítáme hodnoty distribuční funkce v bodech $x = 0, 1, \ldots, 4$. Vstupními argumenty příkazu budou hodnoty 0 až 4 (argument q) a parametr λ (argument lambda). Hodnotu distribuční funkce v bodě $x = 5$ nahradíme přibližnou hodnotou 1. Graf distribuční funkce (viz obrázek 4.8 vpravo) vykreslíme analogicky jako v příkladech 4.2 a 4.5.

```
Fx <- c(ppois(q = 0:4, lambda = lambda), 1)
plot(x, Fx, type = "n", las = 1, xlim = c(-1, 6), ylim = c(0, 1), xlab = "počet
    smrtelných úrazů", ylab = "F(x)")
segments(x0 = x, y0 = Fx, x1 = x + 1, y1 = Fx)
arrows(x0 = 0, y0 = 0, x1 = -1, y1 = 0, length = 0.1)
arrows(x0 = 5, y0 = 1, x1 = 6, y1 = 1, length = 0.1)
points(x, Fx, pch = 19, col = "green4")
points(x, c(0, Fx[1:5]), pch = 21, col = "black", bg = "white", cex = 0.8)
```

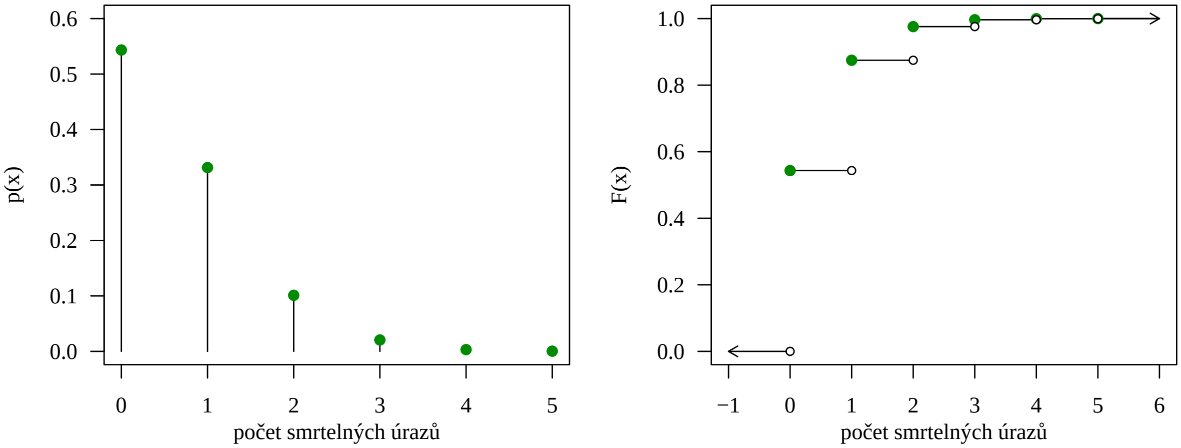
Nyní se zaměříme na výpočet pravděpodobností za předpokladu Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda = 0,61$. Pravděpodobnost, že v jedné armádní jednotce dojde k právě dvěma smrtelným úrazům, tj. $\Pr(X = 2)$ odpovídá hodnotě pravděpodobnostní funkce $p(x)$ rozdělení Po(0, 61) v bodě $x = 2$. Tuto hodnotu vypočítáme příkazem dpois().

```
dpois(x = 2, lambda = lambda) # 0,1010904
```

Pravděpodobnost, že v jedné armádní jednotce dojde k nejvýše jednomu smrtelnému úrazu, tj. $\Pr(X \leq 1)$ odpovídá hodnotě distribuční funkce $F(x)$ v bodě $x = 1$. Tuto hodnotu vypočítáme příkazem ppois().

```
ppois(q = 1, lambda = lambda) # 0,8747949
```

Pravděpodobnost, že v jedné armádní jednotce dojde k alespoň třem smrtelným úrazům, tj. $\Pr(X \geq 3)$ vypočítáme



Obrázek 4.8: Graf pravděpodobnostní funkce $p(x)$ (vlevo); graf distribuční funkce $F(x)$ (vpravo) rozdělení $\text{Po}(0,61)$

tak, že od jedné odečteme pravděpodobnost, že v jedné armádní jednotce dojde k nejvýše dvěma smrtelným úrazům. Tuto pravděpodobnost, odpovídající hodnotě distribuční funkce $F(x)$ v bodě $x = 2$, vypočítáme příkazem ppois().

```
1 - ppois(q = 2, lambda = lambda) # 0,02411467
```

Pravděpodobnost, že v jedné armádní jednotce dojde ke dvěma nebo třem smrtelným úrazům, můžeme vypočítat dvěma způsoby. Prvním způsobem je, že sečteme hodnoty pravděpodobnostní funkce $p(x)$ v bodech $x = 2$ a $x = 3$. Tyto hodnoty vypočítáme příkazem dpois() a sečteme příkazem sum(). Druhým způsobem je, že od pravděpodobnosti, že v jedné armádní jednotce dojde k nejvýše třem smrtelným úrazům, odečteme pravděpodobnost, že v jedné armádní jednotce dojde k nejvýše jednomu smrtelnému úrazu. Obě pravděpodobnosti jsou hodnotami distribuční funkce $F(x)$ v bodě $x = 3$, resp. v bodě $x = 1$ a vypočítáme je příkazem ppois().

```
sum(dpois(x = 2:3, lambda = lambda)) # 0,1216455
ppois(q = 3, lambda = lambda) - ppois(q = 1, lambda = lambda) # 0,1216455
```

Pravděpodobnost, že v jedné pruské armádní jednotce dojde k právě dvěma smrtelným úrazům v důsledku kopnutí koněm, je $0,1011$ ($10,11\,\%$). Pravděpodobnost, že dojde k nejvýše jednomu smrtelnému úrazu, je $0,8748$ ($87,48\,\%$). Pravděpodobnost, že dojde k alespoň třem smrtelným úrazům, je $0,0241$ ($2,41\,\%$). Pravděpodobnost, že dojde ke dvěma nebo třem smrtelným úrazům, je $0,1216$ ($12,16\,\%$). ★

Příklad 4.11. Neřešený příklad

V rámci studie (Greenwood a Yule, 1920) byla publikována data z výstupní zprávy (Londýn, 1919) o výskytu průmyslových havárií, která obsahují počty úrazů u dělnic v továrně při výrobě dělostřeleckých granátů v průběhu pěti týdnů. Celkem bylo do studie zahrnuto $M = 647$ dělnic. Údaje ze studie jsou uvedeny v tabulce 4.7.

Tabulka 4.7: Počet úrazů u dělnic při výrobě dělostřeleckých granátů

x	0	1	2	3	4	≥ 5	$\sum$
$m_{observed}$	447	132	42	21	3	2	647

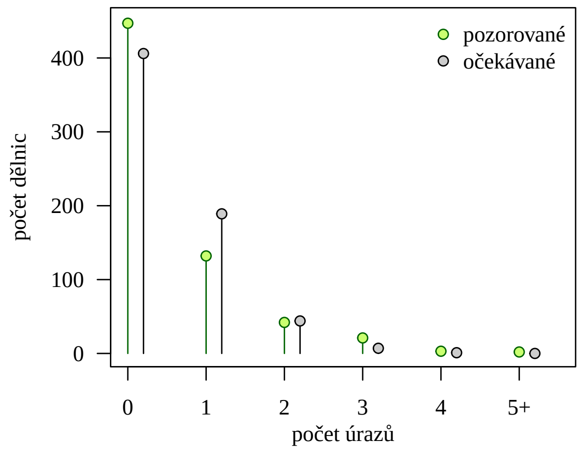
Předpokládejme, že náhodná veličina X popisuje počet úrazů u jedné dělnice při výrobě dělostřeleckých granátů v průběhu pěti týdnů. (a) Najděte rozdělení, které dostatečně dobře vystihuje pravděpodobnostní chování náhodné veličiny X, a odhadněte parametry tohoto rozdělení; (b) ověřte, že nalezené rozdělení je vhodné na popis náhodné veličiny X; vypočítejte očekávané absolutní četnosti za předpokladu nalezeného rozdělení a graficky je porovnejte s pozorovanými absolutními četnostmi uvedenými v tabulce 4.7.

Výsledky: (a) $X \sim \text{Po}(0,4652)$; (b) očekávané absolutní četnosti viz tabulka 4.8; grafické porovnání pozorovaných a očekávaných absolutních četností viz obrázek 4.9.

★

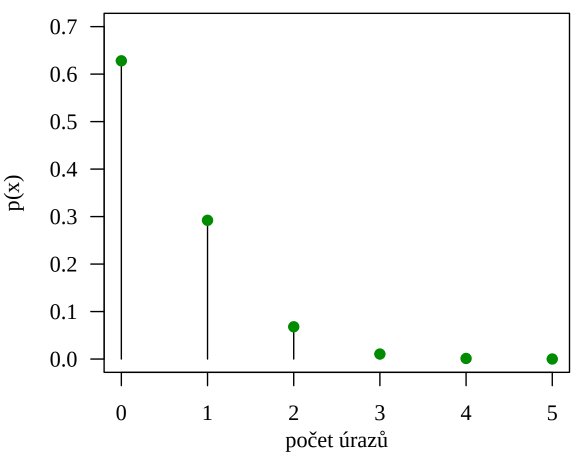
Tabulka 4.8: Očekávaný počet úrazů u dělnic při výrobě dělostřeleckých granátů

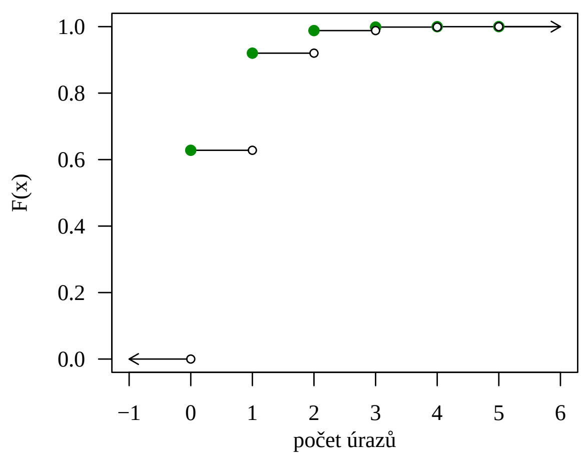
x	0	1	2	3	4	5+	$\sum$
$m_{expected}$	406	189	44	7	1	0	647



Obrázek 4.9: Porovnání pozorovaných absolutních četností a očekávaných absolutních četností za předpokladu rozdělení $\mathrm{Po}(0,4652)$

Příklad 4.12. Neřešený příklad
Za předpokladu, že náhodná veličina X popisující počet úrazů u jedné dělnice při výrobě dělostřeleckých granátů v průběhu pěti týdnů pochází z rozdělení $\mathrm{Po}(0,4652)$, (a) nakreslete graf pravděpodobnostní funkce $p(x)$ a graf distribuční funkce $F(x)$; (b) vypočítejte pravděpodobnost, že v průběhu pěti týdnů dojde u jedné dělnice (i) k alespoň dvěma úrazům; (ii) k jednomu nebo dvěma úrazům; (iii) k nejvýše třem úrazům; (iv) k žádnému úrazu.
Výsledky: (a) graf pravděpodobnostní funkce $p(x)$ viz obrázek 4.10 vlevo, graf distribuční funkce $F(x)$ viz obrázek 4.10 vpravo; (b-i) $\Pr(X \geq 2) = 0,0798$; (b-ii) $\Pr(1 \leq X \leq 2) = 0,3601$; (b-iii) $\Pr(X \leq 3) = 0,9987$; (b-iv) $\Pr(X = 0) = 0,6280$.





Obrázek 4.10: Graf pravděpodobnostní funkce $p(x)$ (vlevo); graf distribuční funkce $F(x)$ (vpravo) rozdělení $\mathrm{Po}(0,4652)$

★