Martingaly

Martingal je matematickým vyjádřením myšlenky **“férové hry”**

Implicitně jsme se s tímto pojmem již setkali.

Připomeňme, že v jednokrokovém modelu trhu se dvěma scénáři existuje rovnovážná pravděpodobnostní míra P a platí

$$S_0 = e^{-r} E_P(S_1) = E\left(e^{-r} S_1\right),$$

Tedy cena v čase $t = 0$ je diskontované očekávání vzhledem k pravděpodobnosti P ceny v čase $t = 1$.

Obecně, pro T-krokový model máme analogicky

$$S_0 = E_P\left(S_T e^{-rT}\right).$$

Navíc, pro libovolný čas $t \leq T$ platí

$$S_t = E_P\left(S_T e^{-r(T-t)} \mid S_0, S_1, \dots, S_t\right),$$

tedy S_t je podmíněné očekávání diskontované hodnoty S_T, podmíněné informacemi o tržním scénáři, které máme v čase t.

Jak uvidíme, tato vlastnost znamená, že diskontovaný proces S_t je martingal.

Připomeňme si ještě formální definici stochastického procesu.

Definice 8.1. Mějme měřitelný prostor $(\Omega, \mathcal{A})$, množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ a indexovou množinu $T \neq \emptyset$ (která hraje roli času). Dále mějme zobrazení $X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$, takové, že pro všechna $t \in T$ je $X(\bullet, t)$ náhodná veličina (kterou značíme X_t). Pak takové zobrazení nazýváme ***stochastický proces*** definovaný na množině T. Značíme $\{X_t;\ t \in T\}$.

Stochastické procesy dělíme na 4 základní typy:

- diskrétní proces s diskrétním časem (např. náhodná procházka)
- diskrétní proces se spojitým časem (např. Poissonův proces)
- spojitý proces s diskrétním časem (např. zobecněná N.P., $X_i \sim N(0,1)$)
- spojitý proces se spojitým časem (např. Wienerův proces)

Přirozená filtrace

Definice 8.2. Ve vícekrokovém trhu se informace o tržním scénáři odhaduje krok po kroku. Pro $t \leq T$ definujeme

$$\mathcal{F}_t = \{\text{všechny jevy určené během prvních } t \text{ period}\} .$$

Zřejmě $\mathcal{F}_t$ je σ-algebra. Konečná posloupnost $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ se nazývá ***přirozená filtrace*** prostoru tržních scénářů Ω.

Obecně, systém σ-algeber $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ se nazývá ***filtrace***, jestliže platí

$$\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$$

kdykoliv je $t \leq s$.

Tedy s rostoucím časem neztrácíme informace, σ-algebra se s rostoucím časem nezmenšuje, typicky se naopak zvětšuje.

Příklad 8.3. 2-krokový model trhu. Množina tržních scénářů v tomto modelu je

$$\Omega = \{(++)\,,\,(+-)\,,\,(-+)\,,\,(--)\}\,.$$

V čase $t = 0$ jsou určeny pouze jevy Ω a $\emptyset$, tedy

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\, \Omega\}\,.$$

V čase $t = 1$ jsou určeny jevy: $F_+ = \{(++)\,,\,(+-)\}$ a $F_- = \{(-+)\,,\,(--)\}$. Tedy

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset,\, \Omega,\, F_+,\, F_-\}\,.$$

V čase $t = 2$ jsou určeny všechny jevy (každá podmnožina Ω), tedy

$$\mathcal{F}_2 = \exp\Omega = \{\text{ všechny podmnožiny } \Omega\}\,.$$

Příklad 8.4. T- krokový model.

Množina Ω_T tržních scénářů je množina posloupností délky T s členy + nebo -.

Celkem je takových scénářů 2^T.

Částečný scénář je posloupnost

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_t)$$

délky $t \leq T$, kde $\xi_j = +$ nebo $\xi_j = -$ pro $j = 1, 2, ..., t$.

Množinu těchto scénářů označíme Ω_t.

Pro každý částečný scénář $\xi = (\xi_1, ..., \xi_t)$ definujeme jev $F(\xi)$ jako množinu všech úplných scénářů, jejichž prvních t složek jsou právě $\xi_1, ..., \xi_t$. Tedy

$$F(\xi) = \{\omega \in \Omega : \omega_j = \xi_j \text{ pro všechna } j = 1, 2, ..., t\}.$$

Úplné scénáře odpovídají koncovým uzlům stromu, částečné pak nekoncovým.

σ-algebry $\mathcal{F}_t$ definujeme pak jako

$$\mathcal{F}_t = \{\text{konečná sjednocení jevů } F(\xi), \text{ kde } \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_t) \in \Omega_t\}$$

Cena akcie v čase t závisí na tržním scénáři, ale jen na jeho složkách do času t, nezávisí na složkách scénáře v časech $> t$.

Tedy proces ceny je adaptovaný přirozené filtraci, ve smyslu následující definice.

Definice 8.5. Posloupnost náhodných veličin X_t je ***adaptovaná přirozené filtraci***, jestliže pro každé t a pro každý tržní scénář $\omega = \xi_1, \ldots, \xi_T$ hodnota $X_t(\omega)$ závisí jen na částečném scénáři $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_t$.

Martingal

Definice 8.6. Nechť $\mathcal{F}$ je přirozená filtrace prostoru tržních scénářů $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$ a P je pravděpodobnostní míra na Ω. Adaptovaná posloupnost náhodných veličin X_t se nazývá ***martingal***, jestliže platí

$$E\left(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) = X_t$$

pro všechna $t \in \{0, 1, ..., T-1\}$.

Pokud

$$E\left(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) \geq X_t$$

mluvíme o ***submartingalu***.

Pokud

$$E\left(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) \leq X_t$$

mluvíme o ***supermartingalu***.

$\mathcal{F}_t$ obsahuje veškeré informace dostupné v čase t. Často je tato informace obsažena v hodnotách X_1, X_2, ..., X_t. Pak máme

$$E\left(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) = E\left(X_{t+1} \mid X_1, X_2, \ldots, X_t\right)$$

Příklad 8.7. (Symetrická jednoduchá náhodná procházka). Nechť $P(X_i = 1) = \frac{1}{2} = P(X_i = -1)$ a $S_n = X_1 + ... + X_n$. Pak S_n je martingal.

Úplnost trhu

Věta o úplnosti trhu

Uvažujeme trh M s aktivy A^1, ..., A^k. Podle základní věty arbitrážní teorie (APT) plyne z neexistence arbitráže existence rovnovážné pravděpodobnostní míry (může jich být i více).

Definice 8.8. Trh bez arbitráže se nazývá ***úplný***, jestliže existuje právě jedna rovnovážná pravděpodobnostní míra. Trh je neúplný, pokud existuje více rovnovážných pravděpodobnostních měr.

Definice 8.9. ***Derivát*** je obchodovatelné aktivum, jehož hodnota V_1 v čase $t = 1$ je funkcí $V_1(\omega_i)$ tržního scénáře. Tedy V_1 je náhodná veličina na $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_N\}$.

Definice 8.10. ***Replikující portfolio*** pro daný derivát V, jehož hodnoty v čase $t = 1$ za scénáře ω_i jsou rovny $V_1(\omega_i)$ je portfolio $\Theta = (\theta_1, ..., \theta_k)$ v aktivech $A^1, ..., A^k$ takové, že:

$$V_1(\omega_i) = \sum_{j=1}^{k} \theta_j S_1^j(\omega_i),$$

kde $S_1^j(\omega_i)$ je cena j-tého aktiva A^j za scénáře ω_i.

Z neexistence arbitráže plyne, že

$$V_0 = \sum_{j=1}^{k} \theta_j S_0^j,$$

tedy pokud existuje replikující portfolio, derivát má jednoznačně určenou cenu v čase $t = 0$.

Věta 8.11. *(**o úplnosti trhu**): Nechť M je trh bez arbitráže s bezrizikovým aktivem. Existuje-li pro každý derivát replikující portfolio v A^1, ..., A^k, pak je trh úplný.*
Naopak je-li M úplný a rovnovážná pravděpodobnostní míra dává kladnou pravděpodobnost každému scénáři (tj. $\pi(\omega_i) > 0$ pro $\forall i$), pak pro každý derivát existuje replikující portfolio (a tedy derivát má jednoznačně určenou cenu).

Důkaz je založen na jednoduchých myšlenkách z lineární algebry.

Deriváty tvoří vektorový prostor (izomorfní $\mathbb{R}^N$).

Trh je úplný, právě tehdy když vektory hodnot aktiv A^1, A^2, ..., A^k v jednotlivých scénářích generují $\mathbb{R}^N$.

Tedy vektory $S_1^j(\omega_i)$, $j = 1, \ldots, k$ generují $\mathbb{R}^N$. Speciálně platí $k \geq N$.

Důkaz: Chceme nejdříve dokázat, že pokud existuje replikujcí portfolio, pak M je úplný.

Uvažujme pro pevně zvolený scénář $\omega_I \in \Omega$ následující derivát D_I, jehož hodnota v čase $t = 1$ je rovna

$$V_1(\omega_i) = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq I \\ 1 & \text{pro } i = I \end{cases}.$$

Podle předpokladu existuje replikující portfolio pro D_l, označme ho $\Theta = (\theta_1, ..., \theta_k)$, v aktivech $A^1, ..., A^k$. Tedy

$$V_0 = \sum \theta_j S_0^j.$$

Je-li π rovnovážná pravděpodobnostní míra, pak také

$$V_0 = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} V_1(\omega_i) \pi_i = e^{-r} \pi(\omega_l).$$

Odtud plyne

$$\pi(\omega_l) = e^r \sum_{j=1}^{k} \theta_j S_0^j$$

a tedy π je jednoznačně určena.

Zbývá nám dokázat opačnou implikaci. Označíme

$$\vec{a_j} = \left(S_1^j(\omega_1), \; S_1^j(\omega_2), \; ..., \; S_1^j(\omega_N) \right)$$

vektor v $\mathbb{R}^N$ pro každou hodnotu j (tedy každé aktivum A_j).
Derivát je vektor v $\mathbb{R}^N$, který dá se replikovat právě tehdy, když vektor jeho hodnot v jednotlivých scénářích patří do lineárního obalu vektorů $\vec{a_j}$.

Nechť existuje $\pi(\omega_i)$ jednoznačně určená, taková, že $\pi(\omega_i) > 0$ pro všechna i.
Budeme postupovat sporem: Nechť existuje derivát D, který nemá replikující portfolio.

Tedy jsou-li jeho hodnoty ve scénářích ω_i rovny $f(\omega_i)$ a označíme-li

$$\vec{f} = \left(f(\omega_1), \, ..., \, f(\omega_N)\right),$$

pak $\vec{f}$ není lineární kombinací $\vec{a_j}$, a tedy $\vec{a_j}$ negeneruje $\mathbb{R}^N$.

Existuje tedy vektor $\vec{v} = (v_1, \, ..., \, v_N)$, který je kolmý na vektory $\vec{a_j}$ pro všechna j, tedy platí

$$\sum_{i=1}^{N} v_i S_1^j(\omega_i) = 0$$

pro $j = 1, \, ..., \, k$.

Aktivum A^1 je bezrizikové, tedy

$$A_1^1(\omega_i) = e^r$$

pro všechna i. Speciálně tedy $\vec{v} \perp (1, ..., 1)$ a

$$\sum_{i=1}^{N} v_i = 0.$$

Pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$ označme

$$\pi^* (\omega_i) = \pi (\omega_i) + \varepsilon v_i.$$

Máme

$$\sum_{i=1}^{N} \pi^* (\omega_i) = \sum_{i=1}^{N} \pi (\omega_i) + \sum_{i=1}^{N} v_i = 1 + 0 = 1.$$

Navíc, je-li ε dostatečně malé, pak $\pi^*(\omega_i) > 0$, neboť $\pi(\omega_i) > 0$, a platí

$$\sum_{i=1}^{N} \pi^*(\omega_i) S_1^j(\omega_i) = \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) S_1^j(\omega_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^{N} v_i S_1^j(\omega_i) = \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) S_1^j(\omega_i).$$

Tedy π^* je další rovnovážná pravděpodobnostní míra, což je spor.