Příklad 2.1. Nechť $X : \Omega \to \{1, 2, 3\}$a $Y : \Omega \to \{-1, 0, 2\}$ jsou náhodné veličiny a sdružená pravděpodobnostní funkce je dána tabulkou:

	$y = -1$	$y = 0$	$y = 2$	f_X
$x = 1$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{6}{18}$
$x = 2$	$\frac{2}{18}$	0	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$
$x = 3$	0	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{7}{18}$
f_Y	$\frac{3}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{8}{18}$	$\frac{18}{18}$

Jsou X a Y nezávislé?

Zřejmě ne, v tom případě by řádky tabulky musely být násobkem jeden druhého.

Vypočteme kovarianci těchto dvou náhodných veličin. Máme

$$XY : \Omega \to \{-1, 0, -2, -3, 2, 4, 6\}\,.$$

Dále

$$E(X) = \frac{6}{18} + \frac{10}{18} + \frac{21}{18} = \frac{37}{18}, \quad E(Y) = \frac{13}{18}$$

a

$$E(XY) = -1\frac{1}{18} + 2\frac{2}{18} - 2\frac{2}{18} + 4\frac{3}{18} + 6\frac{3}{18} = \frac{29}{18}$$

Podmíněná pravděpodobnost a podmíněné očekávání

Připoměňme definici podmíněné pravděpodobnosti pro jevy,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ve finančních modelech je obvykle pravděpodobnost podmíněná informací, kterou máme v danou chvíli. Formálně to zachycuje následující definice.

Definice 2.2. Podmíněná pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny Y za podmínky $X = x$, kterou budeme označovat $f_{Y|X}(. \mid x)$, je definována jako

$$f_{Y|X}(y \mid x) = P(Y = y \mid X = x),$$

pro každé x takové, že $P(X = x) > 0$.

Z definice máme

$$P(Y = y \mid X = x) = \frac{P(Y = y \wedge X = x)}{P(X = x)} = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)},$$

tedy

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)},$$

což je analogický vztah jako platí pro podmíněné pravděpodobnosti jevů.

V předchozím příkladu máme pro $x = 1$

$$f_{Y|X}(y \mid 1) \sim \left(\frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}\right) = \frac{f_{X,Y}}{f_X}.$$

Víme-li, že $X = x$, pak Y má novou pravděpodobnostní funkci $f_{Y|X}(y \mid x)$ jakožto funkci y (x je pevné).

Očekávání vůči této funkci je podmíněné očekávání Y za podmínky $X = x$, které označíme $\Psi(x) = E(Y \mid X = x)$.

Definice 2.3. Funkce (tj. náhodná veličina)

$$\Psi(x) = E(Y \mid X = x)$$

se nazývá ***podmíněné očekávání*** Y při znalosti X.

V minulém příkladu je:

$$\Psi(1) = \frac{1}{6}(-1) + \frac{3}{6}0 + \frac{2}{6}2 = \frac{1}{2},$$

$$\Psi(2) = \frac{-2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

a $\Psi(3) = \frac{6}{7}$.

Věta 2.4. *(O celkovém očekávání). Pro podmíněné očekávání* $\Psi(x) = E(Y \mid X = x)$ *platí*

$$E(\Psi(x)) = E(Y),$$

tedy

$$E(Y) = E(E(Y|X)).$$

Důkaz:

Střední hodnotu náhodné veličiny $\mathsf{E}(Y|X)$ vypočítáme jako

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\big[\mathsf{E}(Y|X)\big] &= \sum_x \mathsf{E}(Y|X=x)\cdot f_X(x) = \\ &= \sum_x \sum_y y\cdot f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x) = \\ &= \sum_y y \sum_x f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x) = \\ &= \sum_y y\cdot f_Y(y) = \mathsf{E}(Y) \end{aligned} \tag{1}$$

Součty náhodných veličin

Lemma 2.5. *Nechť X a Y jsou dvě náhodné veličiny na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $f(x, y)$ je jejich sdružená pravděpodobnostní funkce. Pak pro jejich součet $Z = X + Y$ platí*

$$P(X + Y = z) = \sum_x f(x, z - x).$$

Důkaz: Máme

$$\{X + Y = z\} = \bigcup_x (\{X = x \wedge Y = z - x\})$$

tedy

$$P(X + Y = z) = \sum_x P(\{X = x\} \wedge \{Y = z - x\}) = \sum_x f(x, z - x).$$

Pokud X, Y jsou navíc nezávislé, pak

$$f_{X,Y}(x, z-x) = f_X(x) f_Y(z-x),$$

tedy

$$f_{X+Y}(z) = \sum_x f_X(x) f_Y(z-x),$$

což je **konvoluce funkcí** f_X a f_Y. Označuje se $f_X \star f_Y$.

Náhodná procházka

Jednoduchá náhodná procházka

Jednoduchá náhodná procházka je základem diskrétních modelů pro pohyb cen aktiv. Je to “diskrétní verze” Brownova pohybu.

Uvažujme následující hru:

Hází se opakovaně mincí (ne nutně férovou).

Padne-li hlava (H), získáme 1 Kč. Padne-li orel (O), prohrajeme 1 Kč.

Označme S_0 sumu, kterou máme na začátku

S_n sumu, kterou máme po n hrách.

Je tedy

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

kde X_i je náhodná veličina popisující výsledek i-té hry.

Předpokládáme, že pravděpodobnostní funkce X_i je

$$P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = -1) = 1 - p = q$$

pro všechna i a navíc X_i jsou nezávislé.

X_i jsou tedy analogií Bernoulliho náhodné veličiny, kde místo hodnot $\{1, 0\}$ máme $\{1, -1\}$.

Pro každé pevné n je S_n náhodná veličina, tedy $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ je stochastický proces.

Definice 2.6. Stochastický proces $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá ***jednoduchá náhodná procházka***. Je-li $p = q = \frac{1}{2}$, nazývá se *symetrická* jednoduchá náhodná procházka.

Někdy je vhodnější uvažovat jinou interpretaci

– náhodný pohyb částice po přímce:

V každém kroku $t = 0, 1, 2, \ldots$ se částice posune buď o 1 doprava s pravděpodobností p, nebo o 1 doleva s pravděpodobností $q = 1 - p$.

Grafické znázornění jednoduché náhodné procházky:

Body o souřadnicích (n, S_n) spojíme úsečkami.

Vzniklá lomená čára se nazývá *trajektorie* (cesta) náhodné procházky.

Trajektorie je grafické znázornění realizace náhodného procesu $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Varianty náhodné procházky:

– jiné rozdělení X_i (např. normální)

– hodnoty X_i ne v $\mathbb{R}$, ale v $\mathbb{R}^d$ (vícerozměrná náhodná procházka).

Základní vlastnosti náhodné procházky

Lemma 2.7. *Jednoduchá náhodná procházka je* ***prostorově homogenní****, tedy platí*

$$P(S_n = j \mid S_0 = a) = P(S_n = j + b \mid S_0 = a + b).$$

Důkaz: Obě strany rovnosti jsou rovny

$$P(\sum_{i=1}^{n} X_i = j - a).$$

Podobně je náhodná procházka homogenní i v čase.

Lemma 2.8. *Jednoduchá náhodná procházka je* ***časově homogenní****, neboli platí*

$$P(S_n = j \mid S_0 = a) = P(S_{n+m} = j \mid S_m = a).$$

Důkaz: Levá strana je rovna

$$P(\sum_{i=1}^{n} X_i = j - a),$$

pravá strana je rovna

$$P(\sum_{i=m+1}^{n+m} X_i = j - a).$$

Rovnost tedy plyne z nezávislosti a stejného rozdělení X_i.

Lemma 2.9. *Jednoduchá náhodná procházka má Markovovu vlastnost, tedy*

$$P(S_{m+n} = j \mid S_0, S_1, \ldots, S_m) = P(S_{m+n} = j \mid S_m).$$

Důkaz: Známe-li hodnotu S_m, pak rozdělení pravděpodobnosti S_{n+m} závisí jen na krocích $X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_{m+n}$, tedy je nezávislé na $S_0, S_1, \ldots, S_{m-1}$.

Markovovu vlastnost lze intuitivně popsat slovy: *"náhodná procházka nemá paměť"*, *"minulost ovlivňuje budoucnost jen skrze současnost"*.

Základní techniky pro počítání s náhodnou procházkou

Budeme se věnovat základním technikám počítání s náhodnou procházkou:

– podmínění 1. krokem

– počítání trajektorií

– generující funkci

Technika podmínění 1. krokem

Příklad 2.10. (zruinování hráče): Uvažujme předchozí hru s férovou mincí ($p = \frac{1}{2}$).

Padne-li hlava (H), hráč získá 1 Kč, padne-li orel (O), hráč prohraje 1 Kč.

Nechť $S_0 = k$ je jeho počáteční jmění.

Hráč si chce koupit auto v ceně N.

Bude hrát tak dlouho, dokud $S_n = N$ (koupí auto) nebo $S_n = 0$ (bankrot).

Jaká je pravděpodobnost, že hráč zbankrotuje?

Uvažujme jevy:

$\mathbf{A}$ ... hráč nakonec zbankrotuje;

$\mathbf{H}$ ... první hod je hlava ($P(\mathbf{H}) = p$);

$\mathbf{O}$ ... první hod je orel ($P(\mathbf{O}) = q$).

Podle věty o úplné pravděpodobnosti platí

$$P(\mathbf{A}) = P(\mathbf{H})P(\mathbf{A} \mid \mathbf{H}) + P(\mathbf{O})P(\mathbf{A} \mid \mathbf{O}).$$

Označme $P_k(\mathbf{A})$ hledanou pravděpodobnost bankrotu pro dané počáteční jmění k, tedy

$$P_k(\mathbf{A}) = P(\mathbf{H})P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{H}) + P(\mathbf{O})P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{O}).$$

$P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{H})$ je ale pravděpodobnost bankrotu v situaci, kdy hráč po 1. kroku má $k+1$ (a hra začíná z hlediska pravděpodobnosti znovu, z nezávislosti X_i).

Tedy

$$P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{H}) = P_{k+1}(\mathbf{A})$$

a podobně

$$P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{O}) = P_{k-1}(\mathbf{A}).$$

Označme $p_k = P_k(\mathbf{A})$.

Dosazením dostaneme pro $p = \frac{1}{2}$

$$p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1} = \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2}p_{k-1},$$

což je diferenční rovnice 2. řádu.

Máme

$$\frac{1}{2}(p_{k+1} - p_k) = \frac{1}{2}(p_k - p_{k-1}),$$

tedy přírůstky pravděpodobnosti jsou konstantní.

Označme přírůstky $b = p_k - p_{k-1}$, tedy $p_k = p_0 + kb$.

Okrajové podmínky pro diferenční rovnici jsou:

$p_0 = 1$ (okamžitý bankrot)

$p_N = 0$ (okamžitá koupě auta)

Odtud dostaneme

$1 + Nb = 0$, tedy $b = -\frac{1}{N}$ a

$$p_k = 1 - \frac{k}{N}$$

.

Domácí úkol: Vyřešte úlohu ruinování hráče pro $p \neq \frac{1}{2}$.

Návod: musíme vyřešit uvedenou diferenční rovnici. Analogicky jako pro diferenciální rovnice 2. řádu hledáme řešení ve tvaru exponenciály

$$p_k = \theta^k$$

Dosazením do rovnice dostaneme kvadratickou rovnici pro θ. Obecné řešeni je pak tvaru $A\theta_1^k + B\theta_2^k$. Konstanty A a B určíme opět z okrajových podmínek.