Oceňování finančních derivátů

Martin Kolář

– Praktické aplikace teorie z MF001 a MF002

– V 1. části méně matematiky

Literatura:

J. C. Hull, Options, Futures and Other Derivatives, Prentice Hall, 12-th edition

Ševčovič et al. Analytické a numerické metody oceňování finančních derivátů

Učební text k MF003

Osnova

1. Dělení a použití opcí, put-call parita
2. Opční strategie
3. Horní a dolní odhady cen opcí
4. Delta a delta-hedging
5. Analýza citlivosti Black-Scholesova vzorce
6. Implikovaná volatilita
7. Exotické opce
8. Numeraire, rozšíření Black-Scholesova vzorce pro stochastickou úrokovou míru
9. Modely vývoje úrokové míry, forwardy a opce na dluhopisy
10. Numerické metody pro evropské opce
11. Americké opce

Základní vlastnosti opcí

Myšlenka opčního kontraktu jako *pojistky* proti nepříznivému vývoji je velice přirozená.

Opce se v různých podobách vyskytovaly ve starověku i ve středověku.

Obchodování ve velkých objemech a standardizované obchody na burze nicméně začínají až s nástupem počítačů.

S call opcemi se na burze poprvé obchodovalo v Chicago v dubnu roku 1973.

Put opce byly na burzu uvedeny až o čtyři roky později, v roce 1977.

Ve stejné době se objevily články Blacka, Scholese a Mertona, které odvodily vzorec pro hodnotu evropské opce.

Historie teoretického zkoumání oceňování opcí je ale mnohem starší.

První pionýrskou prací byla dizertace kterou vypracoval v roce 1900 Louis Bachelier, pod vedením Henriho Poincaré.

– Objem obchodů s deriváty je v řádech trilionů (5 x hodnota světového GDP)

– "Debakly" derivátových obchodů: 1995 krach britské Barings bank (N. Leason)

Call opce ... právo koupit podkladové aktivum za pevně stanovenou cenu, která se nazývá *realizační cena* v pevně stanovené době (*expirační doba*).

Put opce ... právo prodat

Jako *podkladové aktivum* pro opce mohou sloužit akcie, komodity, cizí měny, akciové indexy, futures, swapy . . . .

Podkladovým aktivem může být opce, pak jde o složenou opci

Dělení opcí

Podle *typu* použití opce rozlišujeme

- call opce - nákupní opce . . . . . . právo nakoupit
- put opce - prodejní opce . . . . . . právo prodat

Podle *doby* ve které mohou být uplatněny rozlišujeme

- *Evropské opce* - mohou být uplatněny jen v době expirace
- *Americké opce* - mohou být uplatněny kdykoli po dobu životnosti opce, nejpozději v čase expirace

Existují i opce které nemají stanovenu expirační dobu, mohou být uplatněny kdykoliv. Takové opce se nazývají *perpetuální* (některé firmy je využívají jako bonus pro své zaměstnance).

Speciálním typem opcí z hlediska doby uplatnění jsou *bermudské* opce, které je možné uplatnit pouze v určité předem stanovené dny.

Podle *typu obchodování* rozlišujeme dva typy opcí:

- standardní opce - obchodované na burze
- opce "na míru" - opce obchodované přes přepážku (over-the-counter, OTC)

Ten, kdo právo (t.j. opci) kupuje, musí prodávajícímu zaplatit cenu za toto právo, která se nazývá *prémie*.

Prémie má 2 složky:

- vnitřní hodnotu
- časovou hodnotu

Pro call opci je vnitřní hodnota v čase t rovna

$$\text{Vnitřní hodnota} := \max(S_t - K, 0),$$

kde S_t je okamžitá cena akcie v čase t, K je realizační cena opce.

Pro put opci je vnitřní hodnota

$$\text{Vnitřní hodnota} := \max(K - S_t, 0).$$

Časová hodnota je definována jako zbývající hodnota do opční prémie (okamžité ceny opce v čase t):

Časová hodnota = prémie − vnitřní hodnota

Podle vztahu *současné a realizační ceny rozlišujeme:*

- opce mimo peníze (out of the money):
  $S_t < K$ pro call opci, $S_t > K$ pro put opci
- opce na penězích (at the money):
  $S_t = K$ pro put i call opci
- opce v penězích (in the money):
  $S_t > K$ pro call opci, $S_t < K$ pro put opci

Jako příklad uveďme skutečné hodnoty amerických opcí na akcie Intelu, dne 29.5.2003. Cena akcie tento den byla $S_0 = 20,83$.

call	June	July	October
20	1,25	1,60	2,40
22,5	0,20	0,45	1,15

put	June	July	October
20	0,45	0,85	1,50
22,5	1,85	2,20	2,85

Základní typy použití opcí

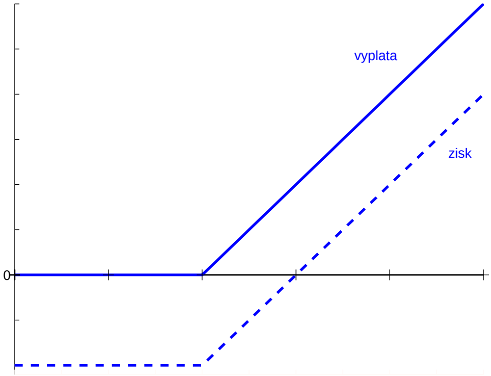
Dále budeme používat následující označení:

S_0	...	cena akcie v současnosti
S_t	...	cena akcie v čase t
S_T	...	cena akcie v čase expirace
T	...	čas expirace
r	...	úroková míra
K	...	realizační cena opce
C	...	cena evropské call opce
P	...	cena evropské put opce
c	...	cena americké call opce
p	...	cena americké put opce

Výplatní funkce evropské call opce je rovna

$$\max(S_T - K, 0).$$

Její graf je znázorněn na následujícím obrázku.



Jištění

Hlavním smyslem použití opcí a dalších derivátů je změnit rizikový profil.

Podle povahy účastníka trhu je možné riziko jak zmenšit, tak zvětšit.

Příklad: V září 2009 máme 10 akcií KB. Současná cena je $S_0 = 280$ Kč za akcii.

Chceme se pojistit proti poklesu ceny na příští 2 měsíce.

Koupíme 10 listopadových put opcí s realizační cenou 275 Kč.

Nechť $P = 10$ Kč. Zaplatíme $10 \cdot 10 = 100$ Kč (cena jistící strategie).

- Pokud cena klesne pod 275 Kč, uplatníme opci, dostaneme $275 \cdot 10 = 2750$.
  Celkem máme zisk $2750 - 100 = 2650$.
- Pokud cena bude větší než 275 Kč, prodáme akcii na trhu, opět máme víc než $2750 - 100 = 2650$.

Pákový efekt

Vedle jištění, tedy snížení rizika, je možné použít opci k opačnému účelu, k násobení potenciálního zisku (nebo ztráty).

Příklad: Investor si myslí, že akcie Citibank v příštích 2 měsících porostou a má 2000$ na investici.

Nechť $S_0 = 20\$$ a nechť 2-měsíční call opce s realizační cenou 22,5$ stojí 5$.

Porovnejme 2 strategie:

1. koupit 100 akcií
2. koupit 400 call opcí

Uvažujme dva možné scénáře.

V prvním cena akcie v době expirace vzroste na 35\$. Ve druhém klesne na 15\$. Výplaty obou strategií jsou zapsány v tabulce:

	15\$	35\$
Akcie	−500\$	1500\$
Opce	−2000\$	3000\$

S rostoucí cenou nad realizační cenu opce roste zisk z akcie i opce úplně stejně.

Rozdíl je v tom že opce je daleko levnější.

Naopak, pokud cena akcie klesne pod realizační cenu, ztrácí investor v opčním portfoliu ihned celou investici.

Opční pozice

Ten, kdo opci kupuje, je v *dlouhé* pozici

Ten, kdo opci upisuje, je v *krátké* pozici

Put-Call parita

Put-Call parita je základní vztah mezi hodnotami call a put opce.

Platí vždy, bez ohledu na předpoklady našeho modelu.

V opačném případě existuje snadno realizovatelná arbitráž.

Pro odvození uvažujme portfolio obsahující jednu call opci nadlouho a jednu put opci se stejnými parametry nakrátko.

Pro hodnotu takového portfolia máme

$$C - P = \max(S_T - K, 0) - \max(K - S_T, 0) = S_T - K,$$

neboli

$$C + K = S_T + P.$$

Odtud vidíme, že $-C + P + S_T$ je bezrizikové portfolio, pro než platí

$$-C + P + S_T = K.$$

Z neexistence arbitráže plyne, že jeho hodnota v čase 0 musí být $K \cdot \mathrm{e}^{-rT}$.

Celkem tedy dostaneme

$$\boxed{C + K \cdot \mathrm{e}^{-rT} = P + S_0}$$

Tento vztah platí nezávisle na předpokladech Black-Scholesova modelu.

Put-call paritu můžeme ověřit také porovnáním hodnot dvou portfolií odpovídajících levé a pravé straně předchozí rovnice:

	$C + K \cdot \mathrm{e}^{-rT}$	$P + S_0$
$S_T < K$	$0 + K = K$	$K - S_T + S_T = K$
$S_T \geq K$	$S_T - K + K = S_T$	$0 + S_T = S_T$

Tedy

$$V_T(C + K \cdot \mathrm{e}^{-rT}) = V_T(P + S_0) = \max(K, S_T),$$

kde V_T je hodnota portfolia v čase T.

Z neexistence arbitráže plyne, že hodnota těchto dvou portfolií musí být stejná i v čase $t = 0$.

Odtud plyne put-call parita.

Opční strategie

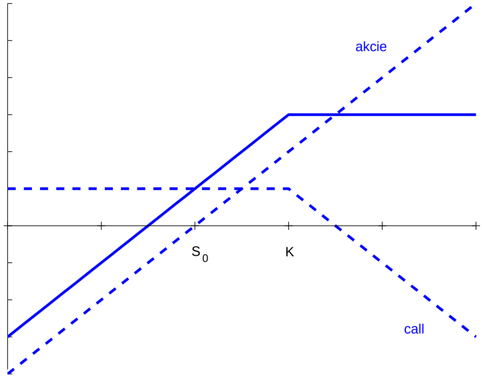
Strategie s jednou opcí a jednou akcií

Nejdříve budeme uvažovat dvě nejjednodušší strategie, které lze vytvořit s pomocí opce a akcie.

Upsání kryté call opce

Upíšeme call opci na akcii kterou vlastníme.

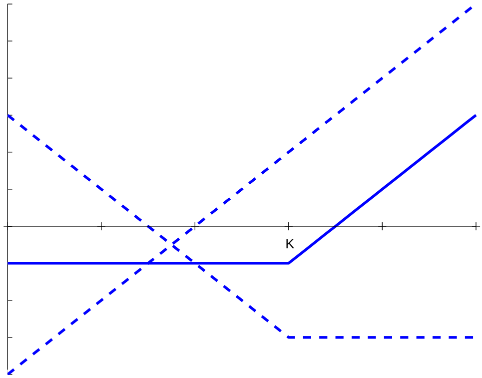
Jde tedy o dlouhou pozici v akcii + krátkou pozici v call opci.


akcie
S0
K
call

Pojistný put

Vlastníme akcii a chceme si ji pojistit zakoupením put opce.

Dlouhá pozice v akcii + dlouhá pozice v put opci.



Z put-call parity plyne, že pojistný put má stejný profil jako call opce jen posunutý o konstantu, protože platí

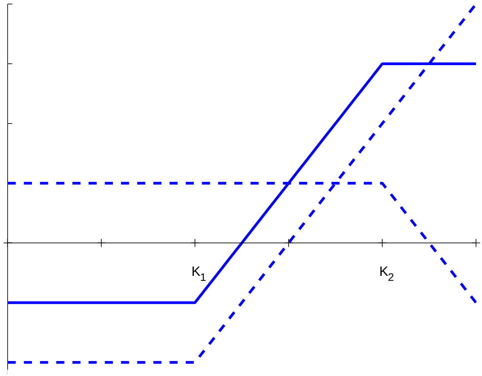
$$S_T + P = C + K.$$

Strategie s více opcemi stejného typu

Strategie tohoto typu se obvykle označují výrazem *spread*. Podle typy investora rozlišujeme dva základní druhy těchto strategií.

Bull spread

V této strategii koupíme call opci s realizační cenou K_1 a upíšeme call opci s realizační cenou $K_2 > K_1$.



Takovou strategii použije investor který věří v růst ceny akcie, odtud název bull spread.

Výplatní profil je znázorněn na obrázku.

Alternativně, bull spread můžeme také vytvořit s použitím put opcí.

Bear spread

Tuto strategii vytvoříme přesně naopak.

Koupíme call s realizační cenou K_2 a prodáme call opci s realizační cenou $K_1 < K_2$.

Výplatní profil je znázorněn na obrázku.

Strategii použije investor, který věří v pokles ceny akcie.

Stejně jako bull spread, můžeme bear spread vytvořit s použitím put opcí namísto call.

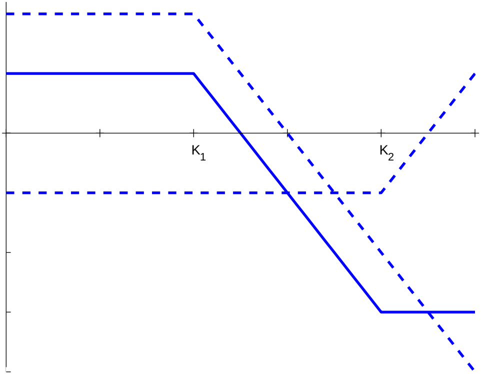


Figure: Bear spread

Butterfly spread

Pro sestavení této strategie uvažujme tři opce s různými realizačními cenami:

Koupíme 1 call opci s real. cenou K_3 (vysokou) a 1 call opci s real. cenou K_1 (nízkou)

upíšeme 2 call opce s real. cenou K_2, mezi K_1 a K_3 a blízko S_0.

Tato strategie obvykle představuje malou investici. Investor očekává jen minimální pohyb v ceně akcie.

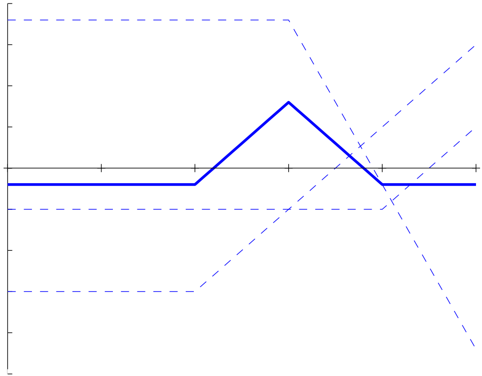


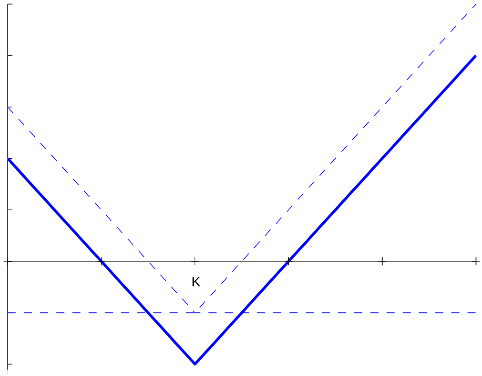
Figure: Butterfly spread

Kombinace put a call opcí

Bottom straddle

Koupíme call a put se stejnou realizační cenou K.

Výplata je znázorněna na následujícím obrázku.



Při použití této strategie investor předpokládá velký pohyb ceny akcie, ale neví jakým směrem.

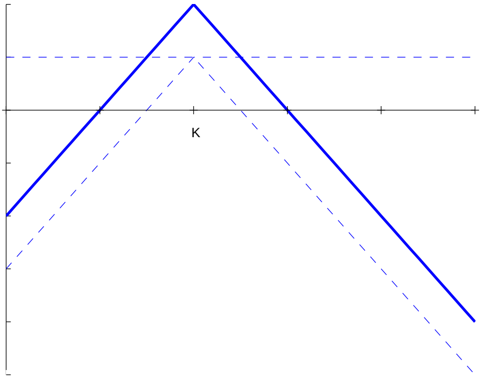
Taková situace může nastat například očekává-li se výsledek soudního sporu firmy která vydala akcie.

Pokud takový názor sdílí většina účastníku trhu, bude cena takové strategie na trhu vysoká.

Obecně platí, že investor může využít svůj odhad vývoje trhu jen za předpokladu že se realizuje a navíc je odlišný od názoru většiny ostatních investorů.

Top straddle

Ve strategii top straddle naopak prodáme call a put se stejnou realizační cenou K.



V této strategii naopak investor neočekává velký pohyb ceny akcie.

Ve srovnání s motýlkem je tato strategie daleko rizikovější.

Případná ztráta v případě růstu ceny není vůbec omezená zdola.

Strip

V této strategii koupíme 1 call a 2 put opce.

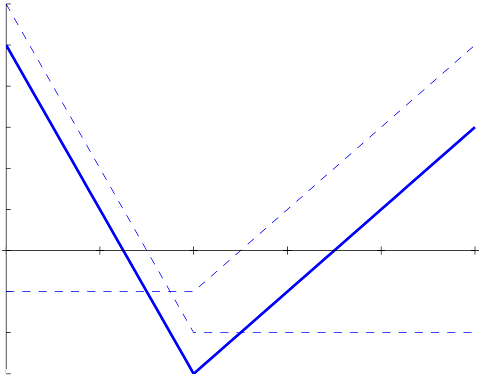


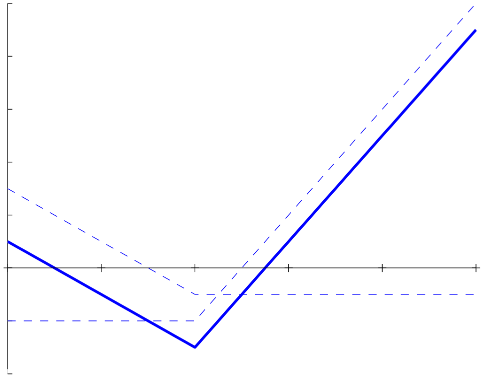
Figure: Strip

Použití této strategie je podobné jako u bottom straddle, investor předpokládá velký pohyb ceny akcie.

V tomto případě si ale myslí že pohyb dolu je pravděpodobnější než pohyb nahoru.

Podobně jako u bottom straddle, zisk ze strategie není omezen zhora.

Strap V této strategii koupíme 2 call a 1 put na akcii, se stejnými parametry.



Tato strategie je opět podobná bottom straddle.

Investor předpokládá velký pohyb ceny akcie, ale myslí že pohyb nahoru je pravděpodobnější než pohyb dolu.

Calendar a diagonal spread

Tato strategie používá namísto opcí s různou realizační cenou opce s různým časem expirace.

Koupíme opci s realizační dobou T_1 a upíšeme opci s realizační dobou $T_2 > T_1$.

V čase T_1 pak pozici uzavřeme, tedy opci s realizační dobou T_2 prodáme.

Výplatní funkce této strategie je podobná strategii motýlek, je ale nelineární.

Další strategií s nelineární výplatou je *diagonal spread*.

V této strategii zakoupíme dvě call opce s různou dobou realizace, i s různou dobou splatnosti.

Obecně můžeme vytvořit v principu libovolný po částech lineární profil výplaty, pokud existují opce s libovolnou realizační cenou.

Pojištěná investice do rizikového aktiva

S využitím call opcí můžeme za určité situace vytvořit portfolio, které bude profitovat z růstu akcie, stejně jako kdybychom koupili samotnou akcii.

Přitom ale jeho hodnota v čase expirace bude vždy nejméně rovna vkladu který jsme do investice vložili.

Uvažujme akcii se současnou cenou $S_0 = 100$ Kč, do které chceme investovat na dobu $T = 1$ rok.

Předpokládejme pro jednoduchost že bezriziková úroková míra r kterou vyplácí např. dluhopisy je taková, že platí

$$S_0 e^{-rT} = 90.$$

Klíčovým předpokladem, který umožňuje strategii vytvořit je, že akcie vyplácí kladný *dividendový výnos* D.

Portfolio sestavíme tak, že za 90 Kč koupíme dluhopisy. Dále zakoupíme call opci na penězích, tedy s $K = 100$.

Cena takové call opce bude záviset na volatilitě akcie.

Pro dostatečně malou volatilitu bude cena opce menší než 10 Kč, celková investice se tedy vejde do 100 Kč.

Pokud opce vyprší v penězích, bude zisk z ní stejný, jako kdybychom investovali do akcie.

Rozdíl je samozřejmě v tom, že na rozdíl od majitele akcie nebudeme v průběhu investice dostávat dividendy.

Pokud opce vyprší mimo peníze, budeme mít díky dluhopisům přesně naši počáteční investici, tedy 100 Kč.

Jak je vidět, taková strategie bude možná jen v případě zavedené, málo volatilní akcie, která navíc vyplácí dividendy.

Pokud akcie nevyplácí dividendy, pak víme ze základního dolního odhadu pro cenu opce že

$$C \geq S_0 - Ke^{-rT},$$

tedy takovou strategii není možné sestavit.