Oceňování finančních derivátů

Martin Kolář

Stochastické modely pro vývoj úrokových měr

– modely, které se používají pro modelování pohybu úrokových měr.

– první takový model zavedl Oldřich Vašíček, americký matematik českého původu (CVUT, MFF UK, KMV)

Vašíčkův model

Vašíčkův model předpokládá, že okamžitá úroková míra se vyvíjí podle stochastické diferenciální rovnice

$$dr_t = a(b - r_t)\,dt + \sigma\,dW_t$$

kde W_t je Wienerův proces, r_t je hodnota okamžité úrokové míry v čase t a a, b, σ jsou parametry modelu.

Tato rovnice má vlastnost mean reversion - Ornstein-Uhlenbeckův proces.

Úroková míra má tendenci se vracet k dlouhodobé průměrné hodnotě, popsané parametrem b.

Parametr a měří intenzitu (rychlost) této tendence.

Parametr σ pak popisuje okamžitou volatilitu tohoto procesu.

Význam jednotlivých parametrů modelu ilustruje také dlouhodobé chování procesu.

V limitě platí

$$\lim_{t \to \infty} E(r_t) = b$$

a

$$\lim_{t \to \infty} Var(r_t) = \frac{\sigma^2}{2a}.$$

Hodnota

$$\frac{\sigma^2}{2a}$$

tedy hraje roli jakési dlouhodobé volatility.

Vašíčkův model je prvním modelem který zachycuje vlastnost návratu k průměru.

Nevýhoda – navzdory vlastnosti mean reversion dovoluje hodnotám okamžité úrokové míry nabývat záporné hodnoty.

Tuto nevýhodu odstraňuje CIR model.

Model CIR

Tento model zavedli Cox, Ingersoll a Ross.

Rovnice má v tomto případě tvar

$$dr_t = a(b - r_t)\,dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t$$

s analogickým významem parametrů jako ve Vašíčkově modelu.

Koeficient driftu opět způsobuje *mean reversion.*

Koeficient voaltility $\sigma\sqrt{r_t}$ ale zabraňuje hodnotám r_t dostat se do záporných hodnot.

Pokud hodnota úrokové míry klesne na nulu, pak je volatilita nulová, a rovnice se stává deterministickou s kladným driftem. Úroková míra se tedy s jistotou vrátí do kladných hodnot.

Pro tento model je možném spočítat explicitně pravděpodobnostní rozdělení budoucích hodnot úrokové míry.

Model Hulla a Whitea

Jednofaktorový model Hulla a Whitea dovoluje závislost parametrů na čase. Rovnice má tvar

$$dr_t = [\theta(t) + \alpha(t) r_t] \, dt + \sigma dW(t)$$

Řešením rovnice můžeme odvodit pravděpodobnostní rozdělení pro r_t - normální rozdělení se střední hodnotou

$$e^{-\alpha t} r(0) + \frac{\theta}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$$

a rozptylem

$$\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}).$$

Další používaný je Ho a Lee model.

Tento model předpokládá, že vývoj úrokové míry je popsán stochastickou diferenciální rovnicí

$$dr_t = \theta_t \, dt + \sigma \, dW_t.$$

Tento model nemá mean reversion, ani mechanismus jak zabránit záporným hodnotám úrokové míry. Je ale možné jej volbou funkce θ nakalibrovat tak, aby souhlasil se současnou výnosovou křivkou.

Americké opce

Budeme zabývat americkými opcemi a jejich oceňováním.

Jak již víme, s americkou call opcí bez dividendy je situace jednoduchá.

Její hodnota je rovna hodnotě příslušné evropské call opce.

Můžeme k jejímu ocenění použít Black-Scholesův vzorec.

Na druhé straně, pro oceňování amerických put opcí, a také call opcí na akcie vyplácející dividendy, neexistuje žádná analytická teorie.

Proto se k oceňování těchto opcí používají numerické metody.

Připomeňme, že americká kupní opce je kontrakt který dává majiteli právo koupit podkladové aktivum kdykoliv v časovém intervalu $[0, T]$ za realizační cenu K, kde T je čas expirace opce.

Označme V^{AC} resp. V^{EC} hodnotu americké, resp. evropské call opce, a analogicky pro put opce.

Zřejmě platí

$$V^{AC}(S,t) \geq V^{EC}(S,t) \tag{1}$$

a stejně tak pro put opci. Navíc cena americké call opce musí splňovat

$$V^{AC}(S,t) \geq \max(S_t - K, 0). \tag{2}$$

Opravdu, jinak by existovala zřejmá arbitráž : koupíme opci a okamžitě ji uplatníme.

To dá zisk $S_t - K$, celkem pak máme $S_t - K - V^{AC} > 0$.

Graf ceny americké call opce tedy nikdy neprotne graf výplatní funkce opce.

Na druhé straně, ukážeme že pro evropskou put opci i pro call s dividendou graf ceny protne graf výplatní funkce.

Pro evropskou put opci (bez dividendy) máme

$$V^{EP}(S,0) = Ke^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1) \tag{3}$$

tedy

$$V^{EP}(0,0) = Ke^{-rT} < K = K - S. \tag{4}$$

Podobně pro evropskou call opci na akcii s dividendovou mírou d máme

$$V^{EC}(S,0) = Se^{-dT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2). \tag{5}$$

Tedy

$$\lim_{S\to\infty} \frac{V^{EC}}{S} = e^{-dT} < 1 \tag{6}$$

a tedy

$$V^{EC}(S,0) < S - K \tag{7}$$

pro dostatečně velké $S >> K$.

Hodnota americké put opce je tedy větší než hodnota příslušné evropské opce a totéž platí pro call opci s dividendou.

Ocenění amerických opcí

Pro ocenění americké put opce, případně call opce s dividendou musíme vedle hodnoty řešení V^{AC} najít také funkci $S_u(t)$ která popisuje hranici předčasného uplatnění.

Ta má následující vlastnosti:

— Je-li $S < S_u(t)$ pak $V^{AC}(S,t) > \max(S-K,0)$ a opci budeme dále držet.

Pro malou změnu času platí stejný jistící argument jako pro evropskou opci.

Tedy v oblasti $0 < t < T$ a $S < S_u(t)$ platí Black-Scholesova rovnice.

— Je-li $S \geq S_u(t)$, pak $V^{AC}(S,t) = max(S - K, 0)$ a opci uplatníme

Matematická formulace vypadá následovně:

Chceme najít funkci $V^{AC}(S,t)$ společně s funkcí $S_u(t)$

popisující hranici předčasného uplatnění, tak, aby platilo

— Funkce $V = V^{AC}(S,t)$ splňuje Black-Scholesovu

diferenciální rovnici.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-d)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{8}$$

na časově proměnné oblasti $0 < t < T$ a $S < S_u(t)$.

— jsou splněny koncové podmínky pro call opci

$$V(S, T) = \max(S_T - K, 0) \tag{9}$$

— jsou splněny okrajové podmínky pro americkou call opci

$$V(0, t) = 0 \tag{10}$$

$$V(S_u(t), t) = S_u(t) - K \tag{11}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_u(t), t) = 1 \tag{12}$$

V další části si ukážeme jak tuto úlohu řešit numericky.