Oceňování finančních derivátů

Martin Kolář

Bezkupónový dluhopis zaručuje vyplacení předem dané sumy ve stanoveném čase.

Poměr této sumy a současné ceny definuje úrokovou míru pro dobu splatnosti dluhopisu.

Tyto úrokové míry jsou základem pro definici časové struktury úrokových měr.

Představují cenu peněz od současnosti (čas t) do času T.

Bezkuponový dluhopis s nominální hodnotou 1 Kč s výplatou

v čase T určuje úrokovou míru mezi časy t a T.

Nechť $P(t, T)$ je cena dluhopisu v čase t. Tedy

$$P(T, T) = 1$$

Máme

$$P(t, T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

tedy zlogaritmováním

$$R(t, T) = -\frac{1}{T - t} \ln P(t, T)$$

$R(t, T)$ je úroková míra na období od t do T, t.j.

$(T - t)$-roční úroková míra, kde t označuje současnost.

Závislost na T se nazývá časová struktura úrokových měr.

Pro krátké období délky Δt dostaneme

$$R(t, t + \Delta t) = -\frac{1}{\Delta t} \ln P(t, t + \Delta t) =$$

$$= -\frac{1}{\Delta t} (\ln P(t, t + \Delta t) - \ln P(t, t))$$

Okamžitou úrokovou míru v současnosti ("zero rate")

dostaneme jako limitu

$$r_t = R(t, t) = \lim_{T \to t} -\frac{1}{T - t} (\ln P(t, T) - \ln P(t, t)) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T)$$

Forwardové úrokové míry

Souvisí s forwardovým kontraktem na dluhopisy.

Definice: forwardový kontrakt na dluhopis je smlouva uzavřená v čase t na koupi dluhopisu v čase $T_1 > t$ za cenu K, se splatností v čase $T_2 > T_1$.

V čase T_1 máme zisk nebo ztrátu $P(T_1, T_2) - K$ (výplatní funkce kontraktu).

Jaká má být forwardová cena K aby hodnota v čase t byla

rovna nule?

Uvažujme následující strategii:

1. Prodáme K ks dluhopisu se splatností v čase T_1 a cenou

$P(t, T_1)$

2. Koupíme 1 ks dluhopisu se splatností v čase T_2 a cenou

$P(t, T_2)$

Strategie je ekvivalentní uzavřené forwardové smlouvě

Hodnota strategie v čase T_1 bude

$$1P(T_1, T_2) - KP(T_1, T_1) = P(T_1, T_2) - K$$

tedy totéž jako z forwardové smlouvy.

Má-li být hodnota v čase t rovna nule, pak

$$KP(t, T_1) - P(t, T_2) = 0$$

Tedy

$$K = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}$$

Platí

$$\frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)} < 1,$$

neboť

$$P(t, T_2) < P(t, T_1)$$

jinak existuje arbitráž.

Označme jako $f(t, T_1, T_2)$ forwardovou úrokovou míru, tedy míru dohodnutou dnes v čase t na období v budoucnosti od T_1 do T_2.

Forwardová cena dluhopisu určuje úrokovou míru na čas od T_1 do T_2. Máme

$$K = P(t, T_1, T_2) = e^{-f(t,T_1,T_2)(T_2 - T_1)}$$

Odtud tedy úrok určený z forwardového kontraktu je dán vztahem

$$f(t, T_1, T_2) = -\frac{\ln K}{T_2 - T_1}$$

a po dosazení

$$= -\frac{\ln P(t, T_2) - \ln P(t, T_1)}{T_2 - T_1}$$

Pro $T_2 \to T_1$ máme

$$f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t,T)$$

Což je okamžitá forwardová úroková míra. Označuje dnes (v čase t) dohodnutou okamžitou úrokovou míru v čase T.

Jaký je vztah mezi $R(t, T)$ a $f(t, T)$?

Platí

$$f(t, T) = R(t, T) + (T - t) \frac{\partial}{\partial T} \ln R(t, T)$$

Opce na dluhopisy

Evropská call opce na dluhopis je právo v čase expirace T

koupit dluhopis za cenu K

Předpoklad: cena dluhopisu sleduje geometrický Wienerův

proces s konstantní volatilitou σ.

Pak platí

$$C = e^{-r(T-t)}(F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2))$$

a pro put opci

$$P = e^{-r(T-t)}(K\Phi(-d_2) - F\Phi(-d_1))$$

kde F je forwardová cena dluhopisu pro čas expirace opce a

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{F}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t))}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Matematicky není model korektní - ale v praxi se používá

– expirace opce musí být daleko před splatností dluhopisu,

jinak je předpoklad GWP určitě chybný

– cena v čase T_2 je známá - efekt pull to par

– redukce derivátu 2. řádu na 1. řád

– Dluhopis je v jistém smyslu derivát úrokové míry, opce na

dluhopis je něco jako složená opce