# Oceňování finančních derivátů

**Martin Kolář**

# Exotické opce

Budeme se zabývat méně obvyklými opčními kontrakty, pro které se ujalo označení *exotické opce*

Evropské a americké opce se obvykle označují jako *plain vanilla* (obyčejné).

Mají standardní vlastnosti a obchodují se ve velkém množství.

Ostatní méně standardní produkty se označují jako exotické.

## Packages

Jako první příklad uveďme balíčky, představující portfolia složená z evropských opcí, forwardů, podkladových akcií, hotovosti.

S příklady balíčků jsme se již setkali v části věnované opčním strategiím.

Jako příklad takového balíčku uveďme *flexibilní forward*

Příklad: Flexibilní forward sestavíme z jedné put opce nakrátko s realizační cenou $K_1$ a jedné call opce nadlouho s realizační cenou $K_2 > K_1$.

– krátká pozice: zaručuje, že podkladové aktivum můžeme prodat za nějakou cenu mezi $K_1$ a $K_2$

– dlouhá pozice: zaručuje, že podkladové aktivum můžeme koupit za nějakou cenu mezi $K_1$ a $K_2$.

## Nestandardní americké opce

Nestandardní americké opce jsou charakterizovány omezením na dobu uplatnění. Připomeňme, že standardní americké opce můžeme uplatnit kdykoli do času expirace.

Uveďme několik příkladů typických omezení na dobu uplatnění:

a) uplatnění opce je omezené na určitá data
(*Bermudské opce*)

b) uplatnění opce je možné jen po část životnosti opce,

   např.: od jistého data

c) realizační cena se může měnit během životnosti opce

## Složené opce

Složené opce jsou opce, jejichž podkladovým aktivem je opět opce.

Dávají tedy právo koupit, případně prodat podkladovou opci s danými parametry ve stanovaném čase za stanovenou cenu.

V závislosti na typu jak opce samotné tak její podkladové opce rozlišujeme 4 typy složených opcí

– call na call

– call na put

– put na call

– put na put

K popsání takové opce tedy potřebujeme 2 realizační ceny a 2 realizační data.

Tyto opce se dají ocenit za předpokladů Black-Scholesova modelu, pomocí 2-dimenzionálního normálního rozdělení

Uvažujme pro konkrétnost ocenění opce *Call na call*.

V čase 1. expirace $T_1$ má držitel právo koupit call opci za cenu $K_1$, která mu dává v čase $T_2$ právo koupit podkladové aktivum (akcii) za cenu $K_2$.

Evropská call na call má v čase $t = 0$ hodnotu

$$V_0 = S_0 \cdot M(a_1, b_1; \sqrt{T_1/T_2}) - K_2 \cdot \mathrm{e}^{-rT_2} M(a_2, b_2; \sqrt{T_1/T_2})$$

$$- \mathrm{e}^{-rT_1} \cdot K_1 \cdot \Phi(a_2),$$

kde

$$a_1 = \frac{\ln(S_0/S^\star) + (r + \sigma^2/2)\,T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \qquad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_1},$$

$$b_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)\,T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}, \qquad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2},$$

$M(a, b; \rho)$ je sdružená distribuční funkce 2-dimenzionálního normálního rozdělení s korelačním koeficientem $\rho$.

Tedy

$$M(a, b; \rho) = \mathrm{P}(X \le a \;\&\; Y \le b),$$

kde $X$ a $Y$ mají 2-dimenzionálního normální rozdělení s korelačním koeficientem $\rho$.

$S^\star$ je cena aktiva v čase $T_1$ pro kterou je cena call opce v čase $T_1$ rovna $K_1$. Tedy pokud $S_1 > S^\star$ složená opce bude uplatněna (v čase $T_1$).

## Chooser options

Chooser options jsou opce "na výběr" (alternativní anglický název – "as you like it")

V předem daném čase $T_1$ se držitel rozhodne, zda jde o call nebo put opci. Tedy hodnota v čase $T_1$ je

$$\max(C, P),$$

kde $C$ je hodnota příslušné call opce a $P$ put opce.

Pokud realizační ceny obou jsou stejné, rovny $K$, potom máme podle put-call parity:

$$\max(C, P) = \max(C, C + K\,\mathrm{e}^{-r(T_2 - T_1)} - S_1)$$

$$= C + \max(0, K\,\mathrm{e}^{-r(T_2 - T_1)} - S_1).$$

Tedy chooser opce je ekvivalentní dvěma opcím:

- 1 call opci s realizační cenou $K$ a dobou expirace $T_2$
- 1 put opci s realizační cenou $K \cdot \mathrm{e}^{-r(T_2 - T_1)}$ a časem expirace $T_1$.

Tyto dvě opce můžeme ocenit podle Black-Scholesova modelu.

## Bariérové opce

Bariérové opce rozlišujeme jednak podle typu bariéry, podle toho zda její dosažení aktivuje nebo deaktivuje opci, a dále podle vzájemné polohy bariéry a současné ceny.

Knock-in: opce začíná platit jen pokud cena akcie dosáhne bariéry $H$ v čase 0 až $T$.

Knock-out: opce je bezcenná pokud cena akcie dosáhne bariéry $H$ v čase 0 až $T$.

Podle polohy bariéry a současné ceny rozlišujeme opce v

závislosti na tom, zda

$H > S_0$ ... bariéra shora

$H < S_0$ ... bariéra zdola)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $H < S_0$ : | down-and-in | $H > S_0$ : | up-and-in |
| | down-and-out | | up-and-out |

Pro konkrétnost uvažujme hodnotu $C_{di}$ down-and-in call opce.

Pro $H \leq K$ hodnota v čase $t = 0$ této opce je

$$C_{di} = S_0 \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} \cdot \Phi(y) - K \cdot \mathrm{e}^{-rT} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda - 2} \cdot \Phi\left(y - \sigma\sqrt{T}\right),$$

kde

$$\lambda = \frac{r + \sigma^2/2}{\sigma^2}, \qquad y = \frac{\ln\left(H^2/S_0 \cdot K\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\,\sigma\,\sqrt{T}.$$

Pro $H \geq K$ je vztah podobný. Dále platí

$$C = C_{di} + C_{do}$$

odkud plyne, že call down-and-out opce má hodnotu

$$C_{do} = C - C_{di}.$$

Analogické vztahy platí pro $C_{ui}$ a $C_{uo}$ (up-and-in, up-and-out call opce).

## Binární opce

Binární opce je charakteristická nespojitou výplatní funkcí.

Opce typu Cash-or-nothing call má výplatu

$$V = \begin{cases} 0 & \text{pokud } S_T < K \\ Q & \text{pokud } S_T > K \end{cases},$$

kde $Q$ je pevně daná hodnota.

Vzhledem k risk-neutrální míře je pravděpodobnost, že cena v čase expirace bude větší než $K$, rovna $\Phi(d_2)$.

Tedy cena cash-or-nothing call opce je rovna:

$$\mathrm{e}^{-rT} \cdot Q \cdot \Phi(d_2).$$

Analogicky cash-or-nothing put opce má hodnotu

$$\mathrm{e}^{-rT} \cdot Q \cdot \Phi(-d_2).$$

Dalším typem binární opce je Asset-or-nothing call, který má výplatní funkci

$$V = \begin{cases} 0 & \text{pokud } S_T < K \\ S_T & \text{pokud } S_T > K \end{cases}.$$

Obyčejná call opci je zřejmě rovna asset-or-nothing − cash-or-nothing, pro $Q = K$. Odtud plyne vztah pro cenu takové opce.

## Look back opce

Výplata look back opce závisí na maximu (případně minimu) ceny aktiva během života opce. Pro evropskou look back call opci bude výplata rovna

$$S_T - \min_{t \in (0,T)} S_t.$$

Tedy opce nám umožní koupit akcii za minimální cenu dosaženou během života opce.

Pro put opci je výplata

$$\max_{t\in(0,T)} S_t - S_T.$$

Opce nám umožňuje prodat za maximální cenu dosaženou během života opce.

Tyto typy opcí se nazývají floating strike

$K$ je nahrazeno maximem (minimem). Nikdy nemohou být mimo peníze.

Dalším typem jsou opce typu fixed strike

Pro call opci je výplata

$$\max_{t \in (0,T)} S_t - K.$$

Pro put opci je výplata

$$K - \min_{t \in (0,T)} S_t$$

Fungují vlastně jako americké opce s možností zpětné volby

ideálního času uplatnění

Pro stanovení maxima, případně minima musí být v opčním kontraktu stanoven přesný algoritmus ze kterých hodnot se maximální (minimální) hodnota určuje. Například to mohou být uzavírací ceny podkladové akcie každý obchodovací den na konkrétním trhu.

K ocenění je potřeba znát pst. rozdělení maxima (minima)

## Shout options

Držitel shout opce má možnost 1-krát za dobu života opce "zavolat" na prodejce opce. Na konci obdrží buď obvyklou výplatu, nebo vnitřní hodnotu opce v čase zavolání. Označme čas zavolání $\tau$. Výplata tedy je

$$\max(0, S_T - S_\tau) + (S_\tau - K).$$

Hodnota v čase $\tau$ je tedy současná hodnota $(S_\tau - K)$ plus hodnota evropské call opce s expirační cenou $S_\tau$.

Další postup ocenění je analogický jako u americké opce.

## Asijské opce

Výplata u asijských opcí závisí na průměru ceny aktiva za období životnosti opce. Jedním z důvodů používání těchto opcí je fakt, že znemožňují velkým investorům manipulovat s cenami podkladového aktiva těsně před vypršením opčního kontraktu.

Asijská call opce typu strike má výplatní funkci

$$\max(0, S_{\text{průměr}} - K)$$

Asijská put opce tohoto typu má výplatní funkci

$$\max(0, K - S_{\text{průměr}})$$

Pro geometrický průměr existuje oceňovací formule zatímco

pro aritmetický průměr neexistuje.