Modelování hodnotového toku MHTOK, 2. Matematické a fyzikální modely

David Kruml

8. 10. 2024

Mapování hodnotového toku

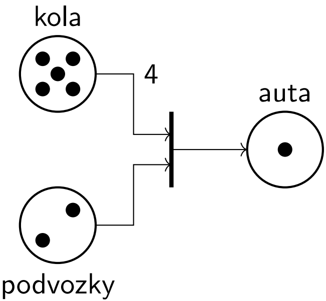
- Schéma receptury nebo výroby, jak jsme v předešlém chápali (procesy, zásobníky, kanály).
- Cílem bývá i zpětné porozumění probíhající výrobě (nalezení vazeb).
- Drobné odlišnosti v označení (trojúhelníky pro zásobníky), další symboly (brýle, autíčko, blesk, ...).
- Naopak se moc neřeší obsazení procesů stroji a lidmi (podobně jako u původního MRP).
- Je snaha doplnit k prvkům sítě číselné parametry.

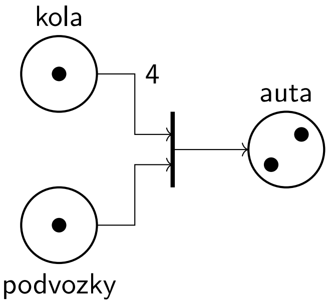
Petriho sítě

- Pořád víceméně totéž (procesy, zásobníky, kanály).
- Abstraktní struktura, řeší se otázky průtoku sítí.
- Položky (výrobky, stroje) reprezentují *žetony* (tokens).
- Proces (znázorněný jen jako čára) je *odpálen* (fired), pokud je ve vstupních zásobnících potřebné množství žetonů (to se pro hodnoty $\neq 1$ obvykle píše ke kanálům = *kapacita kanálu*).
- Po odpálení procesu se odmažou použité žetony ze vstupních zásobníků a připíšou nové do výstupních zásobníků.
- U *časovaných Petriho sítí* se definuje časová náročnost procesu (tak jak to uvažujeme my). Na rozdíl od „obyčejných" Petriho sítí se neřeší tahy, ale celkový čas.
- Logiku sítě lze upravovat zařazením booleovských zásobníků.

Cvičení: Rozmyslete si modelování obvyklých situací Petriho sítí, zejména cyklus a řízení tahem.

Příklad odpálení procesu





Relační implementace časované Petriho sítě

- Tabulka procesů — parametrem časová náročnost.
- Tabulka zásobníků — hodnota zásoby, případně omezení.
- Tabulka kanálů — index procesu, index zásobníku, orientace, kapacita (dávka).

Grafový model

- Hovořili jsme už možnosti interpretovat výrobní síť v jazyce teorie grafů, kde např. zásobník = vrchol, proces = orientovaná hrana.
- Toto pojetí přestává fungovat u větvených procesů (více vstupů nebo výstupů), ale zatím se ho ještě držme.
- Teorie grafů řeší řadu kapacitních problémů — minimální cesta, kritická cesta, maximální tok.
- Od grafů lze snadno přejít ke kategoriím, které přináší možnost kompozice (agregace procesů) a s další strukturou vyřeší i potíže s větvenými procesy.

Definice kategorie

- *Kategorie* sestává z *objektů* (teček) a *morfismů* (šipek).
- Každá šipka spojuje dva objekty — svůj *domain* a *codomain*.
- Je-li A objekt, existuje *identický morfismus* $\mathrm{id}_A = 1_A : A \to A$.
- Jsou-li A, B, C objekty a $f : A \to B, g : B \to C$ morfismy, existuje *složený morfismus* $g \circ f = gf = f; g : A \to C$ (jen různé typy značení).
- Skládání je asociativní: $f(gh) = (fg)h$.
- Složení s identitou je očekávané: $f\mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B f$.

Příklady kategorií

- **Set** — objekty = množiny, morfismy = zobrazení, skládání.
- **Rel** — objekty = množiny, morfismy = binární relace.
- **Vect** — objekty = vektorové prostory, morfismy = lineární zobrazení.
- Kategorie, jejíž objekty jsou množiny, se nazývají *konkrétní*. (Lidé často zapomínají, že jsou i nekonkrétní kategorie.)
- Každá tranzitivní a reflexivní relace ρ na množině A je kategorií. Objekty jsou prvky A, morfismy jsou prvky ρ. Reflexivita zaručí identity, tranzitivita skládání.
- Speciálně každá uspořádaná množina je kategorií.
- Tyto kategorie jsou tzv. *tenké* — mezi dvěma objekty existuje nejvýše jeden morfismus v každém směru. (Kategorie obecně mívají mezi objekty více morfismů.)
- Vyhýbáme se „filozofické diskuzi“, co má být ještě množina a co už třída.

Využití kategorií

- Teorie kategorií má ambice být *základní matematickou teorií* jako alternativa k teorii množin.
- Nestuduje „vnitřek“ objektů, ale jejich vnější interakce vyjádřené morfismy. Např. *podmnožinu* lze definovat vlastnostmi zobrazení vložení, aniž bychom mluvili o prvcích.
- Konstrukce a způsob myšlení je od „klasického“ docela odlišný. Posměšný název „abstraktní nesmysl“.
- Základy položeny v polovině 20. století při studiu algebraické topologie (S. Eilenberg, S. Mac Lane), praktické aplikace přišly mnohem později (funkcionální programování, kvantové procesy, . . .).
- Z teorie kategorií využijeme víc jazyk a základní konstrukce než hluboké výsledky.
- Hodí se k pohledu na procesy jako na černé skříňky.
- Doporučení pro začátečníky: veškeré pojmy a konstrukce si nejprve představujte na uspořádané množině, pak v **Set** nebo jiné pěkné kategorii, pak obecně.

Diagram

- *Diagramem v kategorii* (prozatím neformálně) rozumíme schéma (i opakujících se) objektů spojených morfismy z této kategorie.
- Např. nechť $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, $f(1) = a$, $f(2) = a$, $f(3) = b$, $g(1) = a$, $g(2) = b$, $g(3) = b$. Pak

  $$A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} A, \qquad A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

  jsou diagramy v **Set**.
- U diagramů často požadujeme *komutativitu* — pokud je mezi dvěma objekty více cest, chceme, aby složením byl stejný morfismus. (To je u tenkých kategorií banální, jinde ne.)
- V příkladu je první diagram komutativní (není co kontrolovat), druhý není ($f \neq g$).

Limita diagramu

- Snažíme se doplnit diagram dalším objektem spolu s morfismy do všech objektů diagramu, aby s diagramem komutovaly.
- Pokračování příkladů:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & B \\ C \arrow[u, dashed] \arrow[ur, dashed] \arrow[r, dashed] & A \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & B \\ D \arrow[u, dashed] \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

- Limitou rozumíme *univerzální řešení* úlohy ve smyslu, že všechna ostatní řešení se přes limitu *faktorizují* (viz dolní závory a infimum v uspořádaných množinách).

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, dashed] \arrow[rr, bend left] & C \arrow[r] & \boxed{\mathcal{D}} \end{tikzcd}$$

- V diagramech z příkladu dostáváme limity $C = \{(1,1),(2,1),(3,2),(3,3)\}$ spolu s projekcemi na A, resp. $D = \{1,3\}$ spolu s vložením do A, morfismy do B se v obou případech snadno dopočítají složením.

Oblíbené diagramy a jejich limity

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & B \end{tikzcd}$$

ekvalizátor

$$\begin{tikzcd} A \\ B \end{tikzcd}$$

součin

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr] & \\ & C \\ B \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

pullback

- Věta: Má-li kategorie všechny součiny a ekvalizátory, pak má všechny limity.
- Princip duality: Otočením všech morfismů dostáváme opět kategorii, tzv. *duální kategorii*. Pomocí duální kategorie snadno zavedeme duální pojem k limitě — *kolimitu*.
- Kolimity duální k ekvalizátoru, součinu a pullbacku se nazývají *koekvalizátor*, *součet (koprodukt)* a *pushout*.

Cvičení: Rozmyslete si základní typy limit a kolimit ve **Vect**.

Existence limit a kolimit

Věta: Má-li kategorie všechny součiny (i nekonečné) a ekvalizátory, pak má všechny limity.

Důsledek: (z duality) Má-li kategorie všechny součty a koekvalizátory, pak má všechny kolimity.

Limita se *obvykle* realizuje jako podstruktura součinu objektů diagramu, kolimita jako faktorstruktura sjednocení/součtu.

Funktor

- *Funktor* je analogie homomorfismu (v algebře a jinde), tj. strukturu zachovávající zobrazení. Nyní jde o zobrazení mezi kategoriemi.
- Přesněji, funktor $F : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ tvoří dvojice zobrazení, z nichž jedno přenáší objekty a druhé morfismy. Píšeme např. $A \mapsto FA, f \mapsto Ff$.
- Požadujeme:
  - zachování domainů a codomainů: Je-li $f : A \to B$ morfismus v $\mathcal{K}$, zobrazí se na morfismus $Ff : FA \to FB$ v $\mathcal{L}$.
  - zachování identit: $F\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{FA}$.
  - zachování skládání: $F(gf) = (Fg)(Ff)$.
- Příklady: Funktor mezi dvěma uspořádanými množinami je právě izotonní zobrazení. Vložení **Set** do **Rel** je funktor. Zapomenutí struktury $F : \mathbf{Vect} \to \mathbf{Set}$ je funktor.

Pořádná definice diagramu

- *Diagram v kategorii* $\mathcal{K}$ je funktor $D : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$.
- Zde $\mathcal{D}$ je „čisté strukturní schéma“, jemuž D přiděluje „konkrétní obsah“ z $\mathcal{K}$.
- Ve výrobě může $\mathcal{D}$ odpovídat „čisté receptuře“, které přidělíme funktorem D určitou procesní realizaci.
- Tyto realizace jsou popsány kategorií $\mathcal{K}$, která by měla zahrnovat veškeré možné stavy/zdroje (jako objekty) a procesní změny mezi nimi (jako morfismy).
- Konstrukce může připomínat ohodnocení nebo obarvení grafu. ($\mathcal{K}$ jsou „barvy“.)
- Rádi bychom všechny datové manipulace s tokem viděli jako funktory.

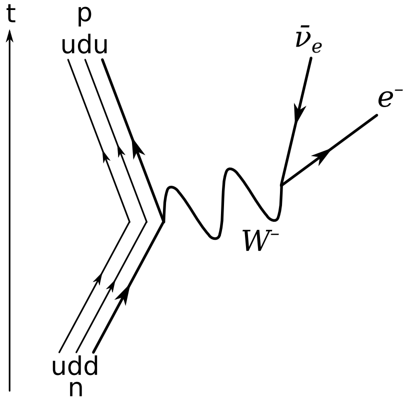
Příklad: faktorizace iterovaného procesu

„Namotání“ iterovaného procesu do smyčky je funktoriální:

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[d, "p"] \\
S \arrow[d, "p"] \\
S \arrow[d, "p"] \\
S \arrow[d, "p"] \\
S
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
S \arrow[loop right, "p"]
\end{tikzcd}
$$

Obě situace jsou diagramy odkazující na S, p a lze je komutativně propojit morfismy (zde dokonce identitami). Konstrukce odpovídá tzv. *přirozené transformaci* (možná později).

Feynmanovy diagramy v částicové fyzice



Feynmanovy diagramy, komentáře

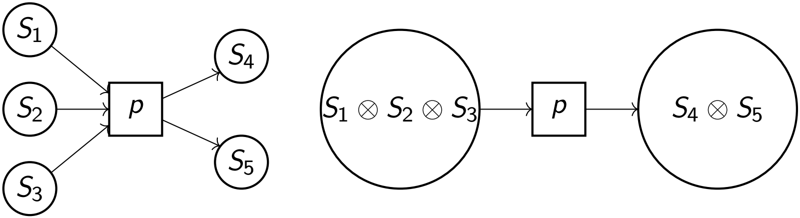
- F. d. vyjadřují interakce elementárních částic.
- Pohyb částice je reprezentován orientovanou čarou v časoprostoru.
- Antičástice se pohybují proti směru času (Feynmanova–Stückelbergova interpretace).
- Vznik nových částic spojením nebo jejich rozpad odpovídá interakci zdrojů v procesu.
- Na pohyb každé částice můžeme nahlížet jako na proces. F. d. je další možností, jak znázornit tok.
- V kvantové fyzice dochází k *provázání stavů* (entanglement), kdy částice sdílí stav i po odloučení (nelokalita). To je silně neinuitivní vlastnost, vede k různým „paradoxům" a revolučním technikám (kvantová teleportace, algoritmy, šifrování).

Tenzorový součin

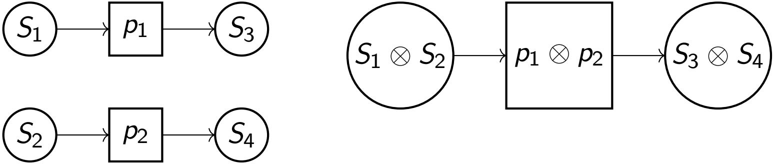
- Stavy v kvantové mechnice jsou popsány jako jisté vektory komplexních vektorových prostorů.
- Provázání si vynucuje konstrukci prostorů složených stavů pomocí *tenzorového součinu*.
- Tenzorový součin je něco jiného než kartézský součin. Dimenze činitelů se násobí.
- Vlastnosti tenzorového součinu lze formalizovat i kategoriálně. Výsledkem (pro rozumné požadavky) jsou tzv. *monoidální kategorie*.
- Přesným popisem se nebudeme zdržovat, tenzorový součin využijeme jen jako „jazykový prostředek“ pro sdružování zdrojů a paralelních procesů.
- Tenzorový součin se zavádí pro objekty i morfismy.

Co tenzorový součin umí

- Sdružení zdrojů u větveného procesu:



- Skládání paralelních procesů:



Poznámky k tenzorovému součinu

- Tenzorový součin budeme využívat naivně, tj. jako symbol pro paralelní skládání.
- Pro náš model požadujeme vlastnosti, aby „fungoval jako lego“:
  - kostky na sobě = normální skládání,
  - kostky vedle sebe = tenzor.
- Platí např. *pravidlo výměny* (interchange rule):

$$(gf) \otimes (kh) = (g \otimes k)(f \otimes h)$$

- V monoidální kategorii existuje *tenzorová jednotka* 1 (a kvůli ní se tak jmenuje) s řadou vlastností, zejména $1 \otimes A \cong A$.
- V toku by se jednalo o formální „zdroj bez účinku“.
- Řada očekávaných vlastností neplatí jako rovnost, ale jen ve formě izomorfismu.

Příklad

Cvičení: Zapište složený proces jako výraz:

$$
\begin{tikzcd}
\arrow[r] & \boxed{a} \arrow[r] & \boxed{c} \arrow[r] & d \arrow[r] & {} \\
\arrow[r] & \boxed{b} \arrow[urr] & & &
\end{tikzcd}
$$

Iterovaný a dávkový proces

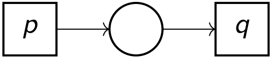
- Iterovaný proces je (z pohledu stroje) *sériovým* složením n kopií procesu:
$$p \ldots p = p^n$$
- Dávkový proces je *paralelním* složením procesů (často stejných, nikoli však nutně — viz lakovna):
$$p \otimes \cdots \otimes p = p^{\otimes n}$$
- Dávkový proces naplňuje podstatu provázaných stavů — všechny činitele provádíme souběžně, nejde o pouhé sjednocení paralelních procesů.
- Rozlišujeme *nezávislou* paralelnost, kde procesy mohou běžet úplně odděleně a s různými parametry.

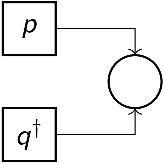
Involuce

- V monoidálních kategoriích je občas k dispozici unární operace*involuce* $\dagger$, která definuje pro každý morfismus $f : A \to B$ k němu *sdružený* $f^\dagger : B \to A$ a splňuje:
  - $\mathrm{id}_A^\dagger = \mathrm{id}_A$
  - $f^{\dagger\dagger} = f$,
  - $(gf)^\dagger = f^\dagger g^\dagger$.
- Příklady: (1) hermitovský operátor $M^* = \overline{M}^T$ ve **Vect**, (2) inverzní relace ρ^{-1} v **Rel**.
- V částicové fyzice involuce odpovídá přiřazení antičástice k dané částici (a naopak).
- V zajímavých aplikacích involuce nesplývá s inverzí (ta má silnější vlastnosti).

Obrácení Feynmanova–Stückelbergovy interpretace

- V částicové fyzice se antičástice tradičně chápou jako „duální“ k částicím.
- Feynmanova–Stückelbergovy interpretace říká, že antičástice jsou vlastně částice pohybující se proti směru času.
- Při zrodu páru částice–antičástice nebo při jeho anihilaci tak dochází k „odrazu v čase“.
- My pro potřeby modelování toku připouštíme obrácenou myšlenku: Místo představy výstupů zásobníku budeme předpokládat, že má pouze vstupy, z nichž některé ho plní zápornými výrobky:





Důsledky zavedení involuce

- Výrobní síť si lze úplně přeskládat a vytvořit samostatnou vrstvu procesů a samostatnou vrstvu zásobníků.
- Pro každou vrstvu si následně můžeme zvolit nejvhodnější organizaci (rozpadové struktury).
- Záporný příspěvek (odběr) je spolu s dávkou parametrem kanálu. Involuce by se tedy měla týkat spíš kanálů a ne procesů. Neměli bychom tedy za morfismy brát raději kanály?

Další poznámky ke kvantovým principům

- Kvantové protokoly se mohou zapisovat v jazyce monoidálních kategorií s involucí (konkrétně tzv. *dagger compact categories*).
- Teorie pak popisuje, které situace jsou ekvivalentní (tj. liší se jen způsobem zápisu, ne svojí funkcí).
- O kvantové informaci je známo, že ji nelze:
  - duplikovat/kopírovat,
  - mazat.
- Vlastnosti kvantové informace se tak velmi podobají vlastnostem hmoty (zákony zachování).
- U kvantových protokolů se hodně řeší transformace mezi klasickou a kvantovou informací.
- To je dobrá analogie s výrobním tokem, kde také současně působí hmotný tok i informační tok.

Přirozená transformace

- Nechť $F, G : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ jsou funktory. *Přirozenou tranformací* $\phi : F \Rightarrow G$ nazýváme systém morfismů $\phi_A : FA \to GA$ pro každý objekt A kategorie $\mathcal{K}$, které komutují ve smyslu $Gf \circ \phi_A = \phi_B \circ Ff$ pro každý morfismus $f : A \to B$ v $\mathcal{K}$.
- Otcové zakladatelé pokládali až př. tr. za první zajímavý pojem v teorie kategorií.
- Př. tr. si můžeme představovat jako „žebřík morfismů" v kategorii $\mathcal{L}$ mezi obrazy kategorie $\mathcal{K}$ ve funktorech F, G.
- Příklad: Vložení vektorového prostoru do svého druhého duálu.
- Lepší definice limity: Tzv. *terminální objekt* mezi přirozenými transformacemi $\phi : K_C \to D$, kde K_C je konstantní funktor (na jeden objekt C a jeho identitu).
- Složitější (ale užitečný) příklad: Nechť C je pevná množina a F přiřazuje každé A množinu $A^C \times C$. Pak *evaluace* $ev_A : A^C \times C \to A$ daná $(f, c) \mapsto f(c)$ tvoří přirozenou transformaci $ev : F \Rightarrow \mathrm{Id}$ v **Set**.

Skládání funktorů a přirozených transformací

- Jsou-li $F : \mathcal{K} \to \mathcal{L}, G : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ funktory, definujeme *složený funktor* $G \circ F$ očekávaným způsobem.
- Jsou-li $\phi : F \Rightarrow G, \psi : G \Rightarrow H$ přirozené transformace, složené morfismy $\psi_A \circ \phi_A$ vytváří *složenou přirozenou transformaci* $\psi \circ \phi : F \Rightarrow H$.
- Popsanému skládání přirozených transformací se někdy říká *vertikální*. Vedle něj lze definovat i *horizontální skládání* pro transformace $\phi : F \Rightarrow G, \psi : H \Rightarrow N$, kde $F, G : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$, $H, N : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, jako $\psi * \phi : H \circ F \Rightarrow N \circ G$, $(\psi * \phi)_A = \psi_{GA} \circ H\phi_A = N\phi_A \circ \psi_{FA}$.
- Vertikální a horizontální skládání se k sobě mají velmi podobně jako sériové a paralelní skládání procesů či normální skládání a tenzor v monoidálních kategoriích (např. pravidlo výměny).

Kategorie funktorů

- Pro dvě kategorie $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ definujeme *kategorii funktorů* $\mathcal{L}^{\mathcal{K}}$, kde objekty jsou funktory $\mathcal{K} \to \mathcal{L}$ a morfismy přirozené transformace mezi nimi.
- Mohou nás zajímat kategorie diagramů $\mathcal{K}^{\mathcal{D}}$ pro speciální případy:
  - $\mathcal{D} = \{\bullet \quad \bullet\}$: Na př. tr. nejsou zvláštní požadavky, lze ztotožnit s $\mathcal{K}^2$.
  - $\mathcal{D} = \{\bullet \to \bullet\}$: Zajímavější, objekty $\mathcal{K}^{\mathcal{D}}$ jsou morfismy v $\mathcal{K}$, morfismy $\mathcal{K}^{\mathcal{D}}$ jsou kompatibilní dvojice morfismů z $\mathcal{K}$.
  - atd.
- Kategorie funktorů vypadají velmi slibně pro abstraktní popis toku.

Cvičení: Rozmyslete si druhý případ, pokud $\mathcal{K}$ je uspořádaná množina.

2-kategorie

- Příjemné vlastnosti přirozených transformací lze abstrahovat pojmem 2-kategorie.
- *2-kategorie* je (kromě základní struktury kategorie) vybavena *2-morfismy*, což jsou „morfismy mezi morfismy", značíme $f \Rightarrow g$.
- Vlastnosti 2-morfismů a vztah k morfismům je popsán řadou axiomů (vynecháváme).
- Příklad: Morfismy v $\mathcal{K}^{\{\bullet\to\bullet\}}$ jsou právě 2-morfismy (mj. vysvětluje se tak označení $f \Rightarrow g$).
- Příklad: Nechť f, g jsou dvě cesty prostoročasem od jedné události k jiné, přičemž f označuje složení „nejdřív čekám, pak vyrábím" a g „nejdřív vyrábím, pak čekám". Pak f lze prohlásit za pomalejší plán než g a vzniklé uspořádání $f \leq g$ chápat jako 2-morpfismus $f \Rightarrow g$.
- V úvaze lze pokračovat až do n-kategorií.

Obohacené kategorie

- Množina morfismů mezi dvěma objekty A, B se značí $\mathrm{Hom}(A, B)$.
- Je-li $f : B \to C$ morfismus, pak pro každé $g : A \to B$ máme $f \circ g : A \to C$. To indukuje zobrazení mezi „Homy“, které logicky označíme $\mathrm{Hom}(A, f) : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C)$.
- $\mathrm{Hom}(A, -) : \mathcal{K} \to \mathbf{Set}$ je tedy funktor.
- Množiny $\mathrm{Hom}(A, B)$ mohou mít další strukturu a zobrazení $\mathrm{Hom}(A, f)$ ji respektovat. Stávají se tak objekty a morfismy „lepší kategorie“ než jen **Set**. Pokud pro každý A máme $\mathrm{Hom}(A, -) : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$, pak o kategii $\mathcal{K}$ říkáme, že je *obohacená nad* $\mathcal{L}$.
- Mnohé kategorie jsou obohacené samy nad sebou — **Vect**, **Ab** (abelovské grupy), **Sup** (úplné polosvazy), atd.
- Pro nás je zajímavá otázka, zda množinu procesů mezi dvěma zdroji lze považovat za zdroj. „Metaprocesy“ pak jsou manipulace s plány.

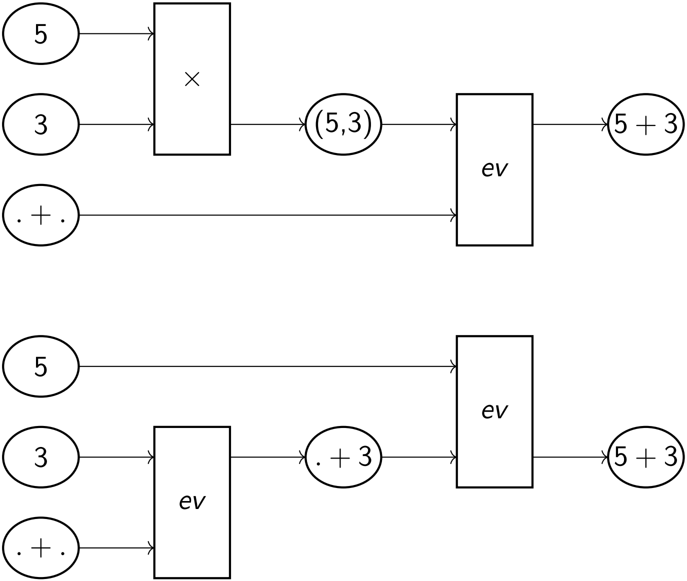
Uzavřené kategorie

- Kategorie uzavřené nad sebou a splňující další přirozené axiomy se nazývají *uzavřené*.
- Zvláštní postavení mají
  - *kartézsky uzavřené kategorie*, kde Hom „se doplňuje“ se součinem a
  - *monoidálně uzavřené kategorie*, kde platí podobné pro tenzor.
- Náznak podstaty: Je jedno, zda si dva vstupy si součinem/tenzorem nejprve sloučíme do jednoho, nebo zda je dosazujeme postupně:

$$\mathrm{Hom}(A \otimes B, C) \cong \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C))$$

- Uplatňuje se evaluační morfismus — jedním ze vstupů je *struktura vyššího řádu*, další vstup ji specifikuje.
- Příklad: Vstupem programovatelného stroje je program a data. Můžeme nejprve vložit jen program, čímž se ze stroje stane jednoúčelové zařízení. To pak zpracuje data.

Příklad na „sčítací krabičky“



Závěry ke kategoriím

- Jazyk teorie kategorií nabízí mnoho možných popisů toku, výběr není snadný.
- Naše hlavní požadavky: horizontální a vertikální skládání procesů, agregace zdrojů.
- Bonusy: involuce, metaprocesy.
- Model je stále ve vývoji.