Modelování hodnotového toku MHTOK, 3. Pravděpodobnost a algoritmy

David Kruml

30. 10. 2024

Nahodilost a pravděpodobnost

Cvičení: Zkuste nematematikovi definovat náhodný jev a pravděpodobnost.

Přístupy k nahodilosti

- Stoický přístup: svět je deterministický, náhoda je jen nedostatek informací.
- Odfiltrování části informací může být záměrné.
- Filozofie často řeší jen nahodilost důsledků, nejistota se ale může týkat i příčin.
- Pravděpodobnost vyjadřuje míru očekávání, že se něco stane. (To se ale určitě stane, nebo určitě nestale — klasická logika.)
- L. Zadeh, nespokojenost s pojetím náhody a rigidností teorie pravděpodobnosti — *fuzzy logika*, víc „míra platnosti“ než „míra jistoty“.

Přístupy k nahodilosti

- Klasická pravděpodobnost: poměr počtu příznivých instancí jevu k celkovému počtu. Musí se předpokládat konečnost, stejná váha, atp.
- Pokročilá pravděpodobnost: geometrická, abstraktně zadaná mírou, podmíněná, atd.
- Statistika — náhoda se týká sběru vzorku, řeší se oprávněnost závěrů.
- Frekventismus vs. bayesiánství.
- Číselná parametrizace jevového prostoru — *náhodná veličina*, výzkum typových pravděpodobnostních rozdělení.

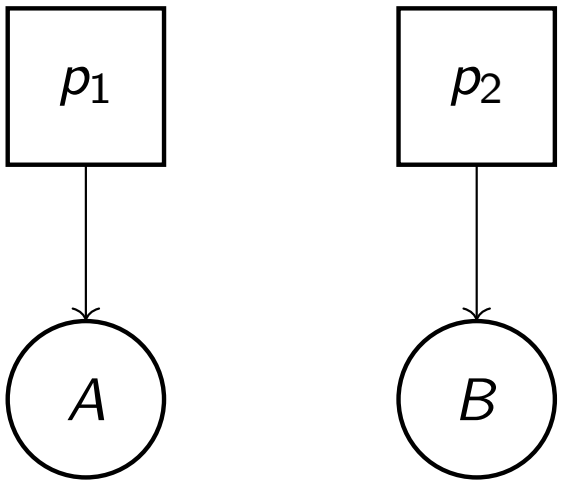
Cvičení: Co je průměrná mzda a co mediánová mzda?

Jak se určují?

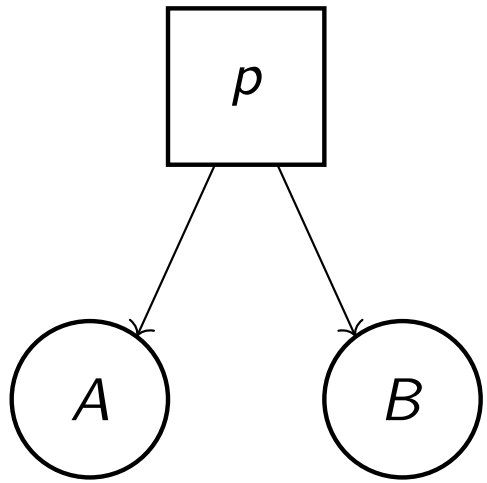
Co jsou zde náhodné jevy, veličiny, pravděpodobnost?

Procesní pojetí náhody — příklad s náhodným výstupem

deterministické procesy

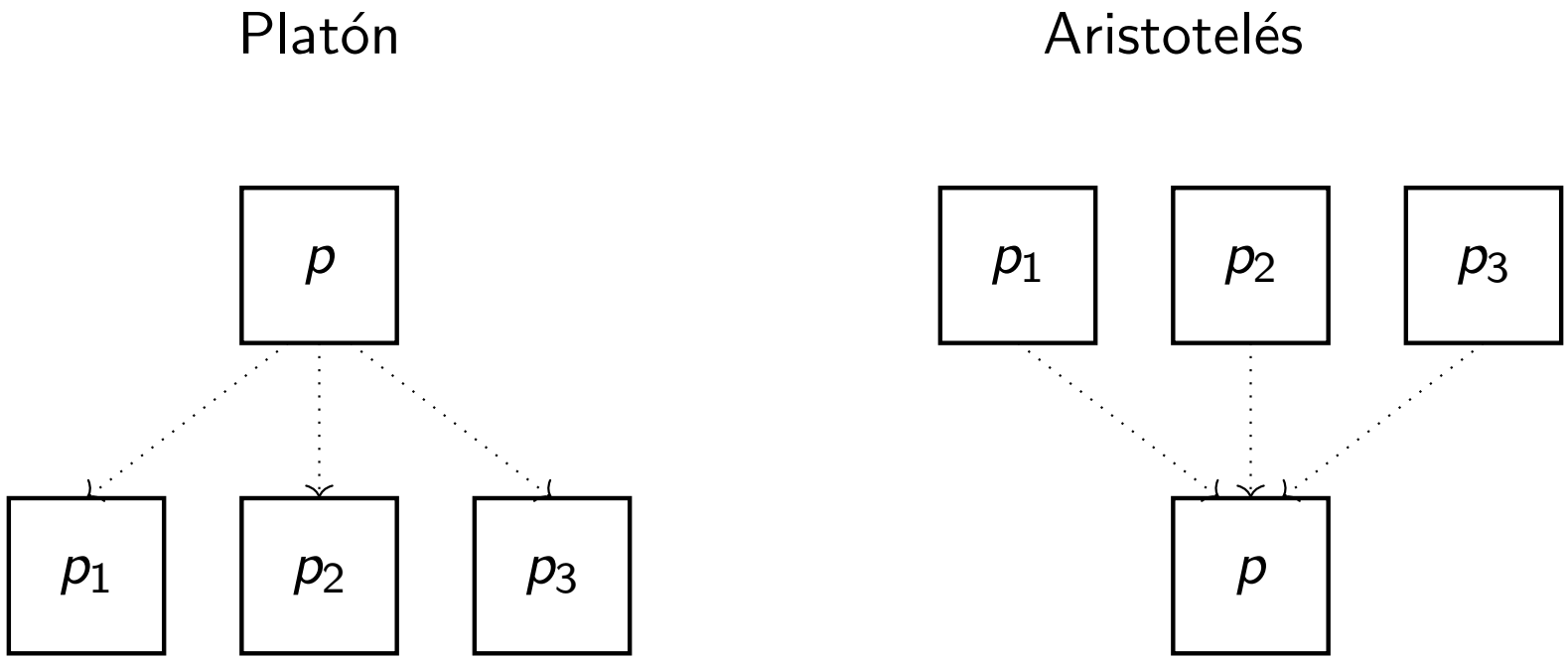


nedeterministický proces



- p lze chápat jako agregaci (deterministických) procesů p_1, p_2.
- Nahodilost výstupu = vznikla ztotožněním procesů při pokračujícím rozlišování zdrojů.

Spor o ideje

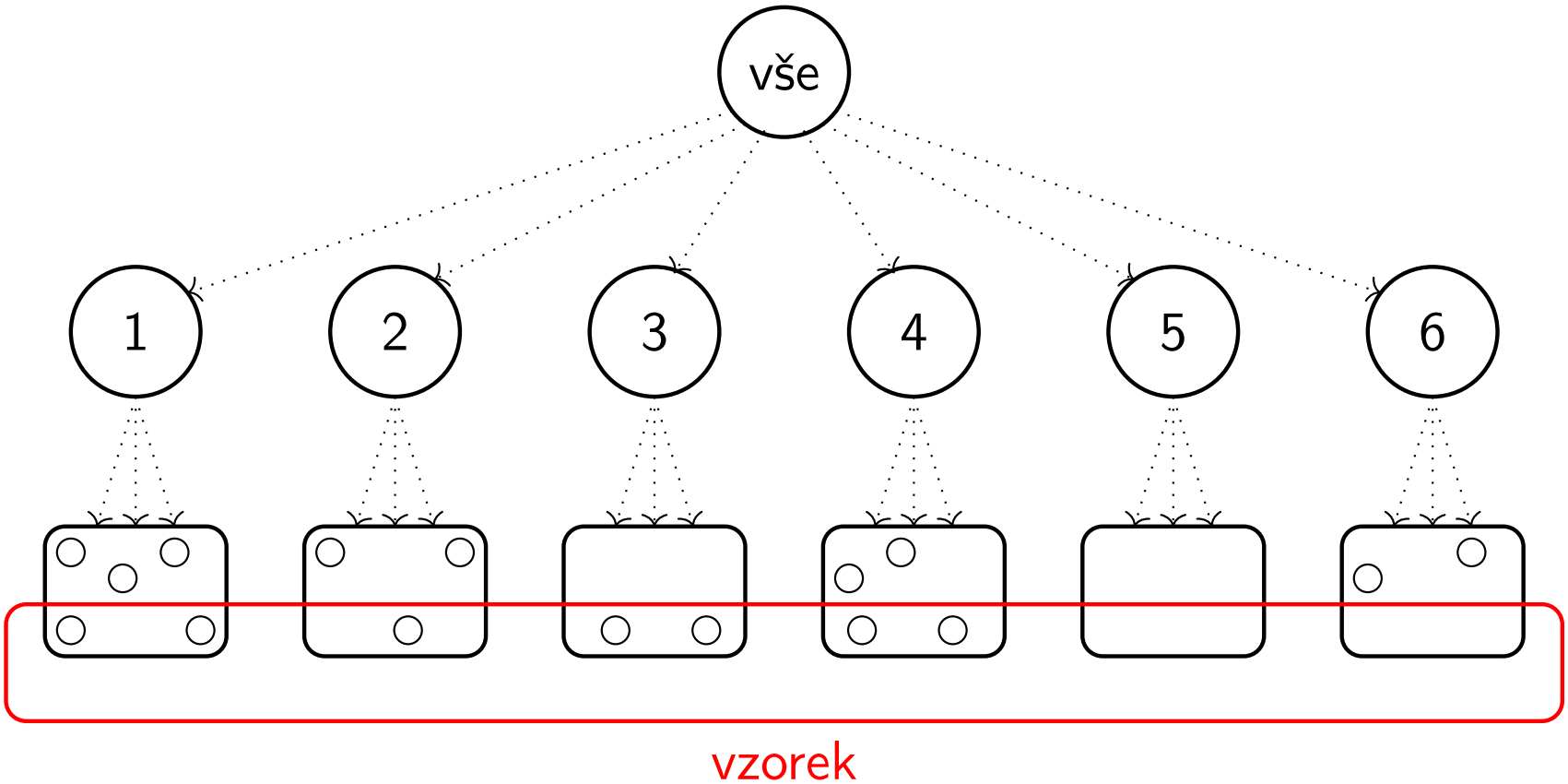


- Platón: Instance jsou (nedokonalé) obrazy idejí.
- Aristotelés: Ideje jsou zobecnění instancí.
- Kopírování a specifikace vs. zobecňování a slučování.

Agregace procesů a zdrojů

- Nahodilost je produktem *agregace* událostí.
- Agregace je dvojího typu:
  - podle blízkosti (navazující nebo souběžné procesy, zboží pro stejnou zákazku),
  - podle podobnosti.
- Rozdíl mezi typy lze zrelativizovat — i blízkost lze chápat jako druh podobnosti.
- Podobnost lze definovat různými hledisky, agregace pak může probíhat postupně a různými cestami.
- Místo rozpadové struktury je pak lepší uvažovat nestromová uspořádání.

Příklad s kostkou



Entropie I

- *Entropie* vyjadřuje míru nejistoty nebo neuspořádanosti.
- Příklad (1) A . . . 80%, B . . . 10%, C . . . 10% — hodně věřím A, varianty B, C jsou marginální.
  (2) A . . . 40%, B . . . 30%, C . . . 30% — všechy tři varianty jsou docela podobně možné, nevím, čemu věřit.
  Situace (2) má větší entropii než (1).
- Morseova abeceda — četná písmena mají krátký kód a vysílají se tak rychleji. U běžného textu dochází (oproti méně promyšlenému kódování) ke komprimační úspoře.
- Princip lze užít obecněji než na písmena a rozšířit na podřetězce atd., kódovat polyalfabeticky, atd. (jazyk „ptydepe“ V. a I. Havlových).
- V teorii informace entropie vyjadřuje nepřekonatelnou minimální velikost kódu (velikost v „dokonalé morseovce“).

Entropie II

- V příkladu (1) potřebujeme „méně než bit“ na kódování A. Naproti tomu pro B, C by bylo dobré volit 3-4 bity, protože $1/2^4 < 1/10 < 1/2^3$.
- Entropie se počítá vzorcem

$$E = -\sum_i P_i \log_z P_i,$$

kde základ logaritmu z vychází z typu aplikace (pravděpodobnost, informace, fyzika).

- Výpočet pro příklad (s logaritmem $\log_2$):

$$E_1 \approx 0.58, \qquad E_2 \approx 1.25$$

Udává průměrnou spotřebu bitů na 1 znak.

Entropie, závěry

- Entropie je velmi univerzální charakteristika nahodilosti a současně velikosti informace.
- Nepotřebujeme jev transformovat na náhodnou veličinu.
- Může být vodítkem pro propojení datového skladu se statistickými nástroji.

Typická rozdělení ve výrobě

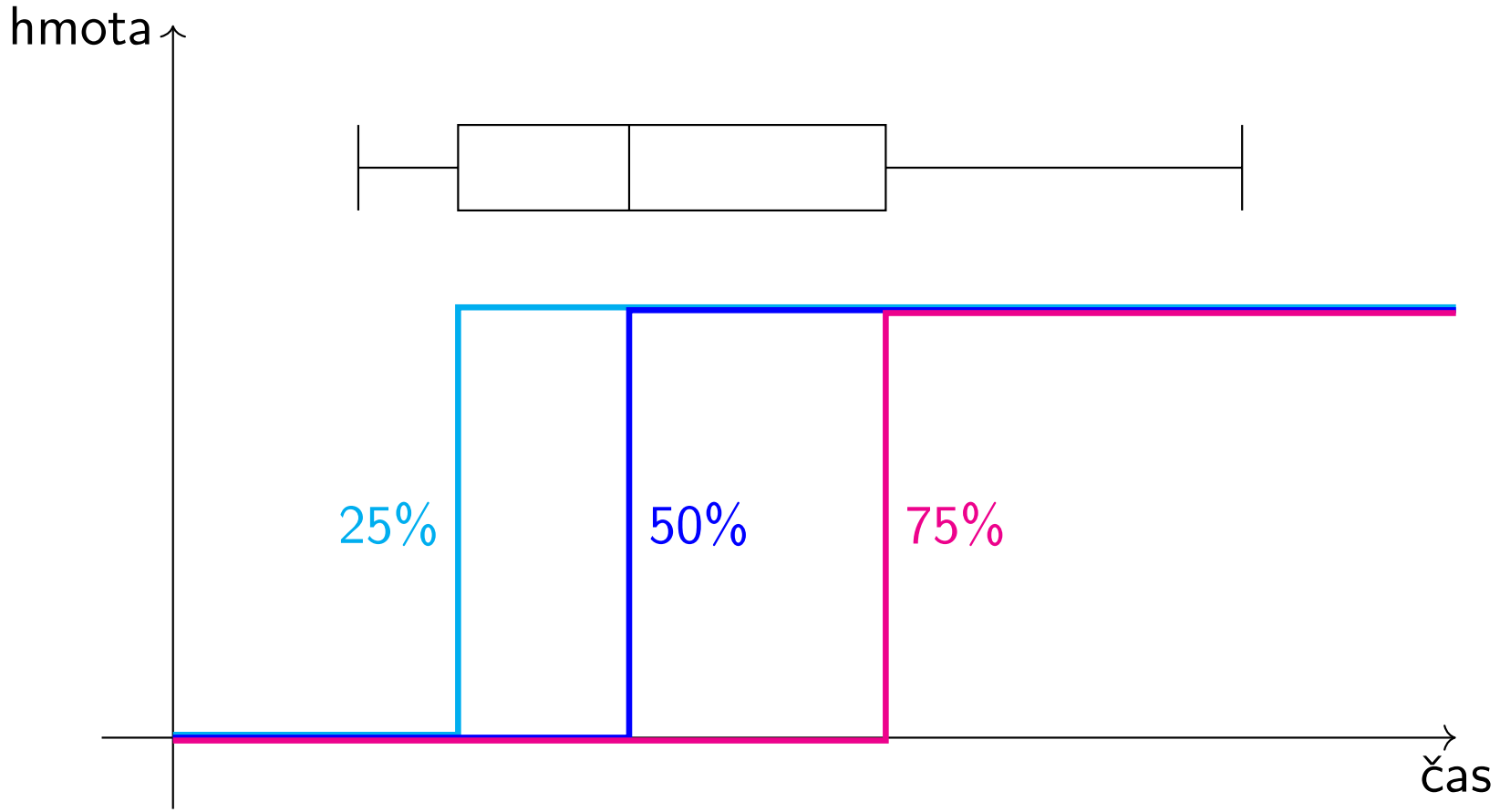
- Alternativní rozdělení — dobrý výrobek/zmetek.
- Normální rozdělení — „přírodní“ variabilita procesů (nebo materiálu)
- Exponenciální rozdělení — nehody a jiné katastrofy, událost se někdy stane, ale nevíme kdy. Jiné typ — méně závažné nehody jsou časté, závažnější se stávají řidčeji (černé labutě).
- Skládání efektů — obecnější rozdělení s pozitivní šikmostí, typicky unimodální (s jedním hrbem).
- Rozdělení vzniklá „prohozením os“, např. Poissonovo.

Cvičení: Připomeňte si pojmy hustota, distribuční funkce, kvantil.

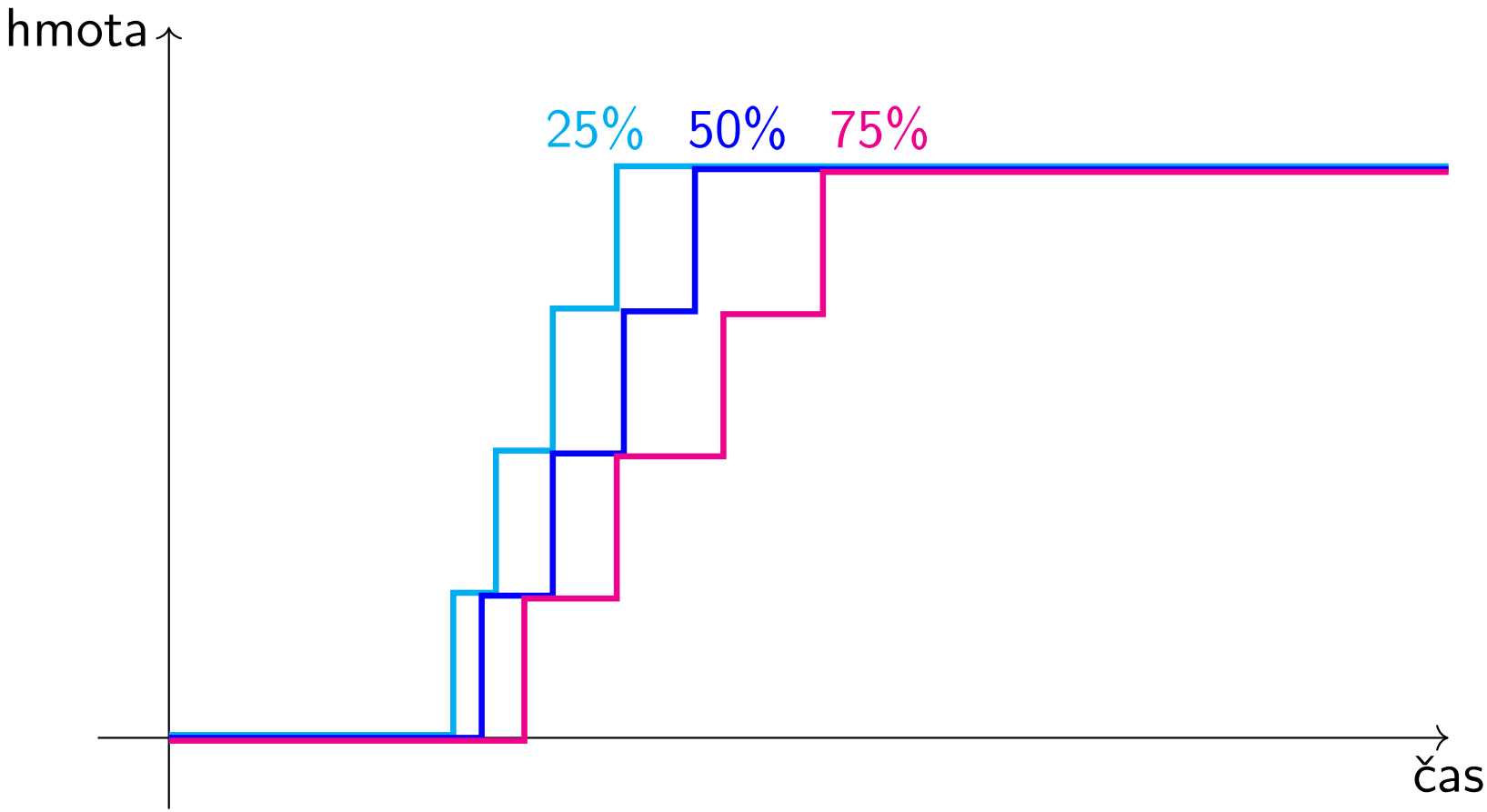
Připomenutí hustoty a distribuční funkce

- U spojitých veličin pravděpodobnost znázorňujeme *hustotou*. (Samotná bodová pravděpodobnost je nulová.)
- *Distribuční funkce* udává „celkový nárůst“ pravděpodobnosti, vidíme z ní *kvantily*.
- Jedno z druhého dostaneme derivací/integrací.
- Interpretace distribuční funkce pro procesní čas: je-li v bodě x hodnota $F(x) = p$, očekáváme, že z N běhů procesu bude pN rychlejších a $(1 - p)N$ pomalejších.
- Jinými slovy, proces se stihne do času x se spolehlivostí p.
- *Boxplot* — pětibodová charakteristika, všechny tři *kvartily* a dva okrajové kvantily (např. 5%, 95%). Případy za okraji se pokládají za nepodstatné.

Projev nahodilosti v časohmotovém diagramu



Typický průběh opakovaného náhodného procesu



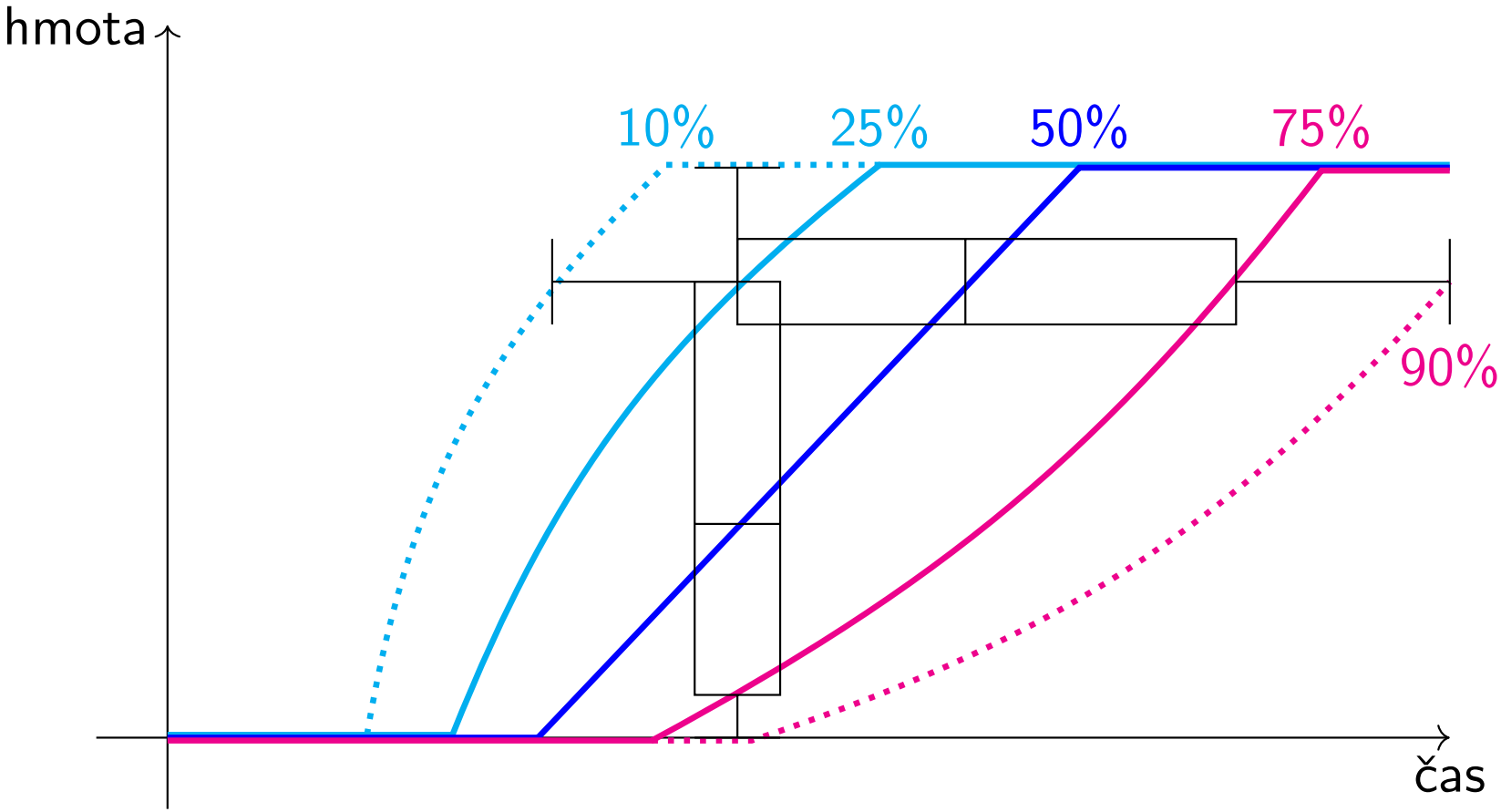
Komentáře k opakovanému náhodnému procesu

- Průběh lze modelovat metodou Monte Carlo — přičítání generovaných náhodných čísel pro dané rozdělení.
- Kvantily snadno vytěžíme ze vzorků (reálných dat nebo simulovaných): hodnoty seřadíme podle velikosti a podíváme se proporčně na pk-tou hodnotu, kde k je počet běhů.
- Kvantil nemusí odpovídat žádnému běhu — na některém výrobku může jeden běh předběhnout jiný. Pro každé n potřebujeme samostatné řazení.
- Kvantily se nemohou „překroutit“ — pro $p < q$ bude průběh p-tého kvantilu rychlejší/menší než q-tého (porovnávání jako 2-morfismus).
- Průběh kvantilových „schodišť“ lze aproximovat parabolickými křivkami — pro $p < 1/2$ konkávní, pro $p > 1/2$ konvexní. Brzy vysvětlíme.

Výměna os

- Našim cílem je výpočet zásob v zásobníku v pravděpodobnostním prostředí.
- Připomeňme, že zásobník je souběžně napájen kladnými (vstupními) a zápornými (výstupními) signály a ty je třeba efektivně sečíst.
- Sčítáme hmotu (zásoby), nikoli čas. Nahodilost časovou potřebujeme převést na nahodilost hmotovou. Místo „kdy bude hotovo n kusů?“ se ptáme „kolik vyrobíme do času t?“
- Druhé z rozdělení je diskrétní (pokud je výroba diskrétní). Nicméně aproximace nahrazují schodiště spojitými křivkami a vedou tak ke spojitému popisu hmotové nahodilosti.
- Banální, ale důležité pozorování — rychlost výroby lze porovnávat dvěma ekvivalentními způsoby:
  - stejný objem vyrobíme v kratším čase,
  - za stejný čas vyrobíme více.
- V důsledku toho horizontální a vertikální náhodné veličiny „sdílí kvantily“.

Sdílení kvantilů



Modelářovo dilema

- V matematickém modelování často stojíme před dilematem, zda volit model
  - jednoduchý, ale nepřesný,
  - nebo přesný, ale složitý.
- Ve druhém případě složitost může způsobit nepřesnost jiného typu.
- Příklad: Reálná výrobní dat velmi pečlivě „rozškatulkujeme“, čímž dostaneme jemné členění na všechny myslitelné případy. Tím se ovšem zmenší vzorky a vzroste statistická chyba. Např. místo abych počítal všechny běhy procesu p, zaměřím se jen na běhy ve čtvrtek a v listopadu, protože dnes je čtvrtek a je listopad „a co kdyby to mělo nějaký vliv“.
- S ohledem na kvalitu dat je na místě uvážit i zjednodušení kalkulu pro práci s náhodnými veličinami.

Klasické sčítání náhodných veličin

- Nechť X, Y jsou nezávislé spojité náhodné veličiny s hustotami f, g. Pak je hustota h veličiny $X + Y$ dána konvolucí

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)\mathrm{d}x.$$

- Příklad s diskrétními rozděleními — hod dvěma kostkami:

$$\begin{aligned} P(X+Y=7) = {} & P(X=1)P(Y=6) + \\ & + P(X=2)P(Y=5) + \\ & + \cdots + \\ & + P(X=6)P(Y=1). \end{aligned}$$

- Spočítat integrál se často neumí, výsledkem součtu nemusí být „pěkné“ pravděpodobnostní rozdělení.
- Rezignujme na přesnost a počítejme součet přibližně a jednodušeji.

Momenty náhodné veličiny

- střední hodnota $E(X)$ — ve statistice a diskrétním rozdělení vážený průměr, u spojitých

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x.$$

- *n-tý centrální moment*:

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^n f(x)\mathrm{d}x.$$

- m_2 je *rozptyl*.
- m_3/m_2 je *šikmost*.
- Označme si střední hodnotu μ, rozptyl σ^2 a třetí centrální moment γ. Je-li je třeba rozlišit pro různé náhodné veličiny, napíšeme veličinu do indexu.

Aditivita momentů μ, σ^2, γ

- Všechny tři sledované momenty jsou *aditivní*, tj. pro nezávislé náhodné veličiny X, Y máme:

$$\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y,$$
$$\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y,$$
$$\gamma_{X+Y} = \gamma_X + \gamma_Y.$$

- Tato vlastnost se bohužel pro momenty vyšších řádů pokazí, pokračovat lze s tzv. *kumulanty* (viz teorie momentových vytvořujících a charakteristických funkcí v teorii pravděpodobnosti).
- Pokud sčítáme n stejných nezávislých kopií téže veličiny X, označme výsledek $n * X$. Dostáváme:

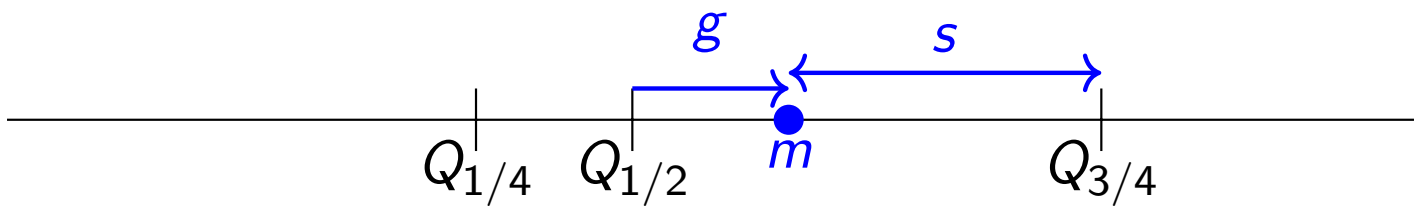
$$\mu_{n*X} = n\mu_X,$$
$$\sigma^2_{n*X} = n\sigma^2_X,$$
$$\gamma_{n*X} = n\gamma_X.$$

Vztahy mezi momenty a kvantily

- Pro normální (Gaussovo) rozdělení je známo, že kvantily jsou tvaru $\mu + k\sigma$ pro vhodné k ($k < 0$ pro $p < 1/2$ a $k > 0$ pro $p > 1/2$, μ splývá s mediánem).
- Pro opakovaný proces máme $\sigma^2_{n*X} = n\sigma^2_X$, a tedy $\sigma_{n*X} = \sqrt{n}\sigma_X$. To je ono slibované vysvětlení parabolického vývoje kvantilů.
- Experimentálním pozorováním jsme také zjistili, že rozdíl střední hodnoty a mediánu se s n nemění. Rozdíl souvisí se šikmostí, což je v souladu s rovností

$$\frac{\gamma_{n*X}}{\sigma^2_{n*X}} = \frac{n\gamma_X}{n\sigma^2_X} = \frac{\gamma_X}{\sigma^2_X}.$$

Pseudomomenty



- Zavedeme si náhrady za momenty m, s, g podle vzorců:

$$m = \frac{Q_{1/4} + Q_{3/4}}{2}, \quad s = \frac{Q_{3/4} - Q_{1/4}}{2}, \quad g = \frac{Q_{1/4} + Q_{3/4}}{2} - Q_{1/2}.$$

- Tvařme se, že se chovají jako $\mu, \sigma, \gamma/\sigma^2$, tj. položme

$$m_{X+Y} = m_X + m_Y, \quad s_{X+Y} = \sqrt{s_X^2 + s_Y^2}, \quad g_{X+Y} = \frac{g_X s_X^2 + g_Y s_Y^2}{s_X^2 + s_Y^2}.$$

- Pro iterovaný proces zřejmě dostaneme

$$m_{n*X} = n m_X, \qquad s_{n*X} = \sqrt{n} s_X^2, \qquad g_{n*X} = g_X.$$

Komentáře k pseudomomentům I

- Převod kvantilů na pseudomomenty je lineární, inverzní převod je dán vzorci:

$$Q_{1/4} = m - s, \qquad Q_{3/4} = m + s, \qquad Q_{1/2} = m + g.$$

- Odvodili jsme zjednodušený „fuzzy“ kalkulus pro sčítání náhodných veličin.
- Připomínáme předpoklady „rozumnosti“ uvažovaných veličin.
- Pro ně experimenty ukázaly překvapivě výborné výsledky (rozdíl v jednotkách procent vzhledem k σ).
- Nepřekvapivě horší jsou výsledky na extrémně odlišných rozděleních, např. alternativních, tvar U. Problémy jsou i na okrajích kampaní.
- U opakovaných procesů rozdělení velmi rychle tíhne k normálnímu (centrální limitní věta). Kdybychom zanedbali šikmost, asi by se nic hrozného nestalo a v praxi se to běžně dělá.

Komentáře k pseudomomentům II

- Metodu lze zobecnit a místo mediánu řešit obecný kvantil Q_p (třeba pro požadovanou spolehlivost), myšlenka je pořád podobná.
- Připomínáme, že s, g se kromě principiální nepřesnosti od původních momentů liší i násobkem.
- Pro odhad m (náhražka za střední hodnotu μ) se v popisné statistice někdy používá přesnější odhad

$$m = \frac{Q_{1/4} + 2Q_{1/2} + Q_{3/4}}{4}.$$

  Zatím jsme nevyužili. Nepřesnosti se transformacemi tam a zpět částečně vykompenzují.
- Transformují se 3 kvantily na 3 pseudomomenty a zpět. Co je vhodným protějškem pro pětibodovou charakteristiku?

Strategie výpočtu stavu zásobníku v čase t

1. Signály modelujeme trojicí kvartilů.
2. Pro čas t překlopíme osy, tj. zjistíme hodnoty kvartilů na hmotové ose.
3. Kvartily transformujeme na pseudomomenty.
4. Sečteme pseudomomenty.
5. Pseudomomenty transformujeme na kvartily a odhadneme z nich kvantil = spolehlivost zásobníku pro čas t.

Lineární validace zásobníku I

- Jak bylo dříve naznačeno, signály *perfektních* opakovaných procesů lze shora i zdola aproximovat lineární funkcí.
- Aproximace může být i víceúrovňová (heijunka).
- Z takto aproximovaných signálů odhadujeme i signál na zásobníku.
- Přitom je třeba:
  - Rozdělit studovaný časový intervaly na úseky tak, aby na všech podintervalech byly všechny signály lineární, tj. hledáme společné zjemnění se všemi zlomovými body (událostmi).
  - Horní odhad počítat jako součet horních aproximací.
  - Dolní odhad počítat jako součet dolních aproximací.

Lineární validace zásobníku II

- Dále sledujeme zásoby ve zlomových bodech. Mohou nastat tyto situace:
  - Dolní odhad přeteče horní mez — zásobník jistě přetéká.
  - Horní odhad přeteče horní mez, ale dolní odhad ne — nevíme nic, musíme zpřesnit odhad další iterací.
  - Horní odhad nepřeteče horní mez — zásobník jistě nepřetéká.
- Duálně řešíme situaci na dolní mezi.
- Na sousedním bodu dělení může nastat:
  - stejná situace, pak se stejně chovají i všechny body uvnitř intervalu,
  - jiná situace, pak dochází k protnutí některého nebo obou odhadů s přímkou mezní zásoby.
- Případné průsečíky určí nové dělení a další (přesnější) iteraci provádíme jen na podintervalech, kde neznáme odpověď.

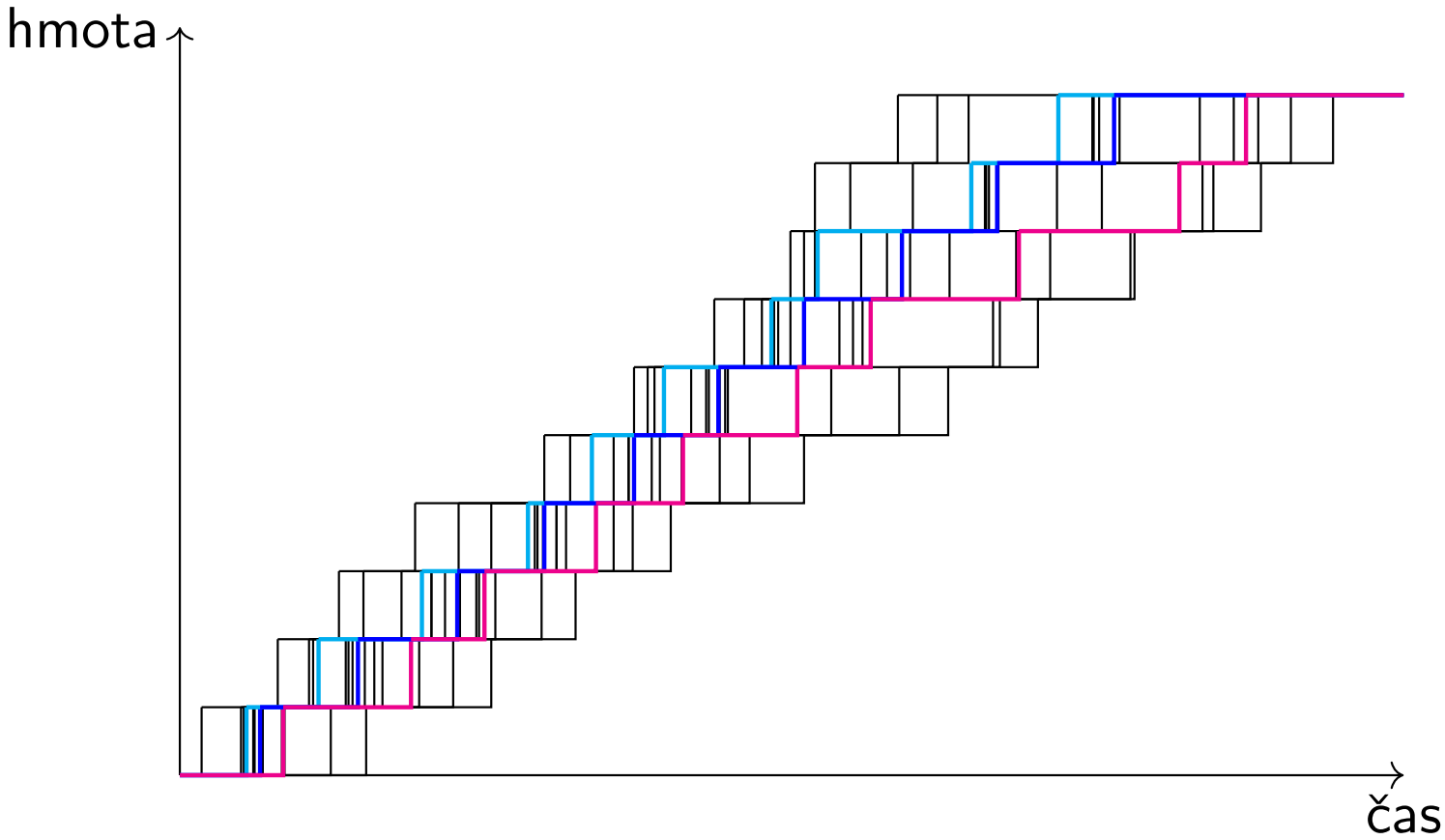
Lineární validace — komentáře

- Čím je výroba pravidelnější, tím víc aproximace šetří výpočetní čas.
- Iterace algoritmu (hlavní cyklus) by měla být navržena tak, aby přidávala (dříve přeskakované) události, a to jen ty nezbytné.
- Výsledkem algoritmu je rozčlenění studovaného intervalu na úseky, kde je zásobník funkční (v mezích) a kde selhává (mimo meze).
- V realitě selhání zásobníku může znamenat blokování nebo hladovění navazujících procesů.
- Průsečíky se počítají snadno, protože veškeré objekty jsou spojnice událostí, tedy úsečky.
- Přetečení a podtečení zásobníku je vhodné validovat samostatně, v souběžné validaci by bylo třeba diskutovat velké množství různých situací a vytvářet zbytečně jemné dělení intervalu.

Validace zásobníku s nahodilostí

- Připomeňme, že u náhodných procesů dochází k „rozmazání“ signálu. Není jasné, jak přesně výroba proběhne.
- Prostor všech možných průběhů popisujeme pomocí křivek kvantilů, což jsou hranice pomalejších a rychlejších průběhů pro danou pravděpodobnost.
- Kvantil stále „vypadá jako signál“, tj. (v diskrétní výrobě) jde o lomenou čáru definovanou událostmi.
- Aproximací kvantilu pro opakovaný proces je parabola (až na medián, kde je to přímka). V dalším se zaměříme i na úlohu, jak parabolu lineárně aproximovat.
- Rozšířený validační algoritmus tedy zohledňuje:
  - Místo jednoho (determinovaného) průběhu bereme v potaz několik význačných kvantilů — zatím nám stačí kvartily.
  - Pro každý kvantil uvažujeme horní i dolní odhad.
  - Lineární aproximace parabol vyžáduje další zjemnění členění intervalu na události. (Kombinaci tohoto členění s iteracemi algoritmu jsme zatím neřešili — pěkné téma pro BP.)

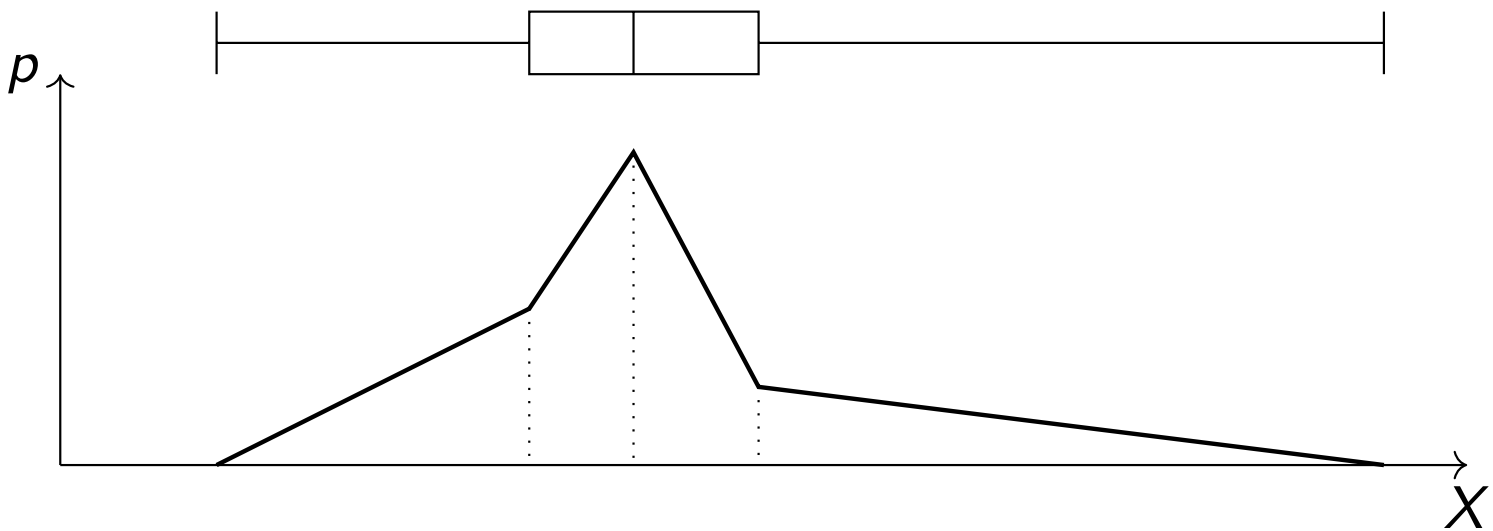
Simulace opakovaného náhodného procesu



15 běhů, vybíráme 4., 8. a 12. v pořadí.

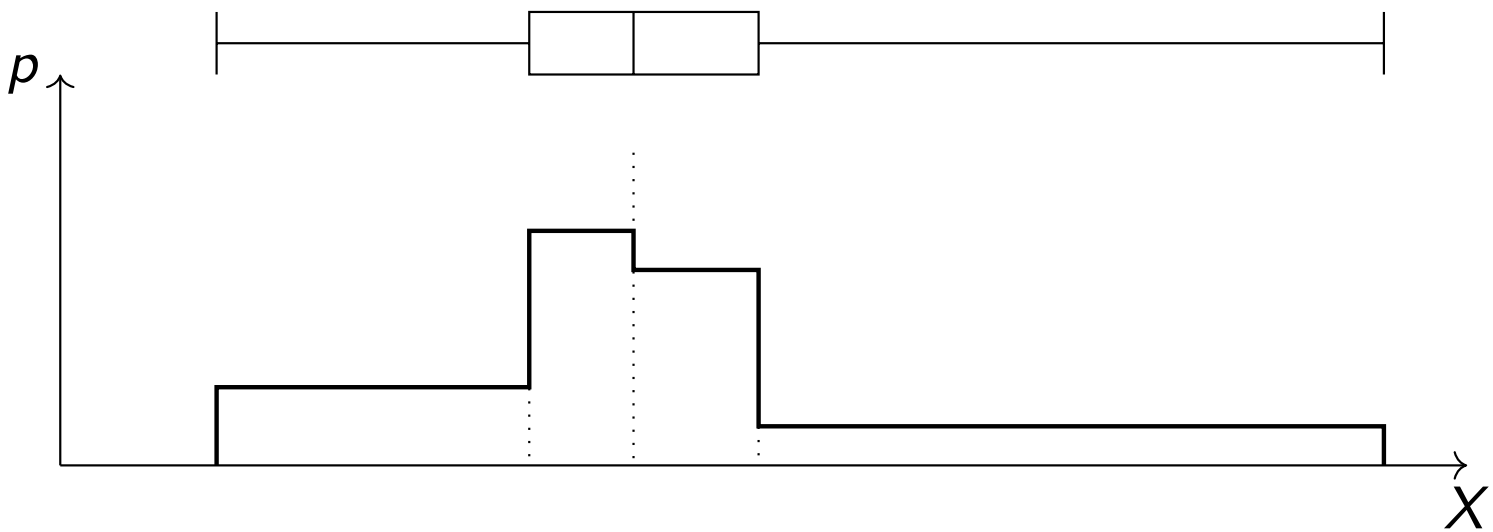
Co vyjde? I

- Pro každý bod dělení intervalu převádíme odhady kvantilů na *odhady pseudomomentů*, sečteme je pro všechny signály zásobníku a výsledek můžeme zpětně převést na kvantily.
- Pro kvartily pak bychom mohli obdržet odpověď typu: „Zásobník v čase t nepodtéká s pravděpodobností větší než 50%, ale menší než 75%.“
- „Přesnou“ spolehlivost si můžeme vymodelovat podle vzdálenosti meze od kvantilů, např. pomocí *lichoběžníkového rozdělení*:



Co vyjde? II

- Lichoběžníkové rozdělení dobře vypadá, ale trochu hůř se s ním počítá, protože distribuční funkce (integrál) je kvadratická, potřebujeme znát celou pětibodovou charakteristiku a levá a pravá polovina se nemusí potkat .
- Někdo by proto mohl dát přednost *obdélníkovému rozdělení*. To má lineární distribuční funkci a stačí nám znát jen okolní kvantily:



Změna dotazu

- Jinou možností je už od začátku počítat s jinou množinou kvantilů, např. $Q_{1/4}, Q_{3/4}, Q_p$, kde p je požadovaná spolehlivost.
- Místo doplňovací otázky „Jaká je spolehlivost v čase t?“ řešíme otázku zjišťovací „Je spolehlivost v čase t aspoň p?“
- Obě otázky mají své opodstatnění, zjišťovací forma má jednodušší výpočet.

Odmocninová rovnice I

- Z dřívějších úvah jsme dostali, že při výrobě n kusů v opakovaném procesu předpokládáme všechny kvantily procesního času ve tvaru:

$$t = nm + a\sqrt{n}s + bg,$$

kde a, b jsou vhodné konstanty pro danou pravděpodobnost a zvolený způsob modelování rozdělení.

- Výměna os odpovídá obrácení otázky „Kolik výrobků bude hotovo v čase t?“, tj. řešíme rovnici v n pro parametr t.
- Po úpravách dostáváme:

$$\begin{aligned} as\sqrt{n} &= t - nm - bg, \\ (as)^2 n &= m^2 n^2 + (t - bg)^2 - 2m(t - bg)n, \\ m^2 n^2 - ((as)^2 + 2m(t - bg))n + (t - bg)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Odmocninová rovnice II

- Substitucí

$$A = \frac{a^2}{m^2}, \qquad B = \frac{t - bg}{m}$$

rovnici zjednodušíme na tvar

$$n^2 - (A + 2B)n + B^2 = 0.$$

- Diskriminant je

$$D = (A + 2B)^2 - 4B^2 = A^2 + 4AB = A(A + 4B).$$

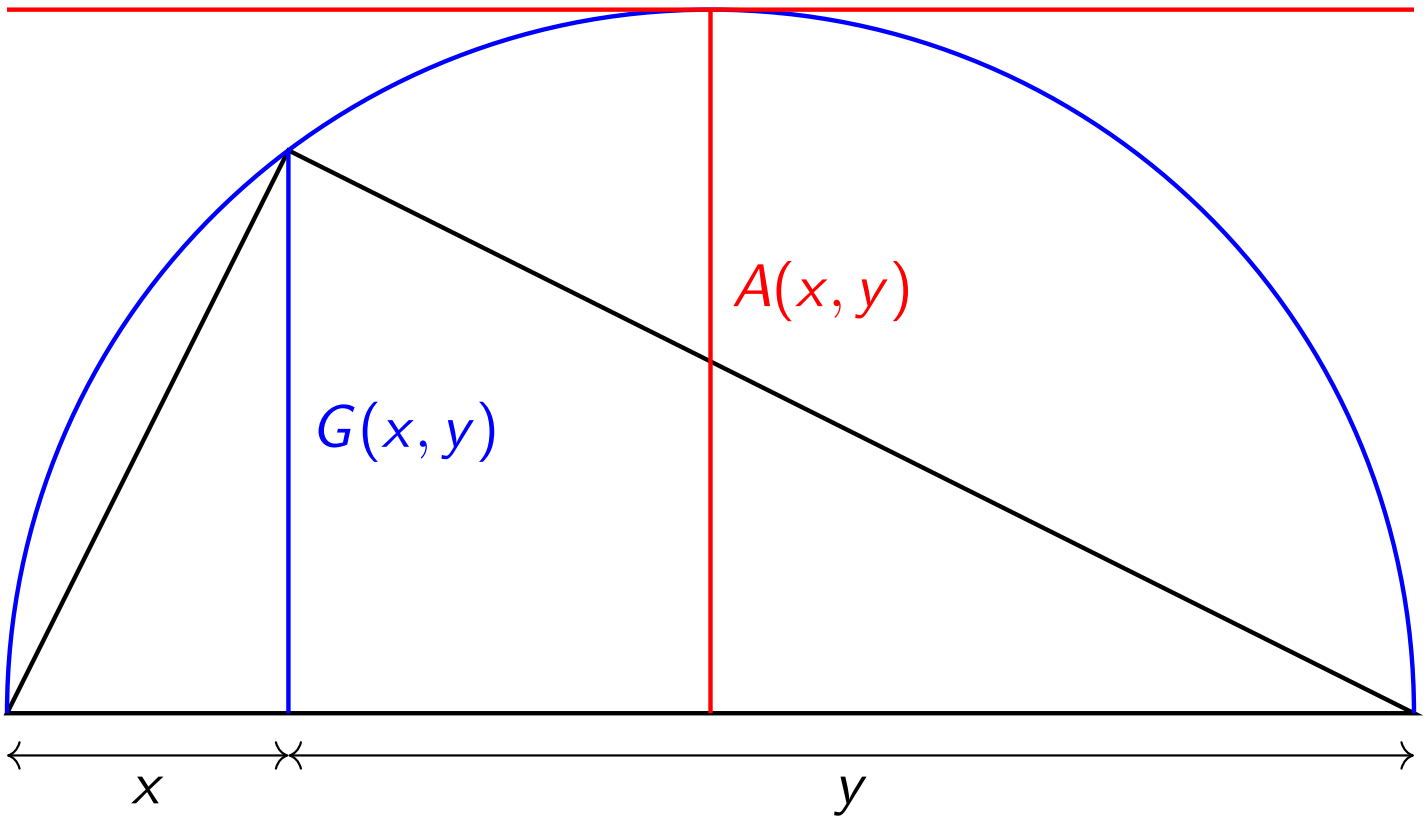
Odmocninová rovnice III

- Dostáváme kořeny

$$n_{1,2} = \frac{(A+2B) \pm \sqrt{A(A+4B)}}{2}.$$

- Zajímá nás jeden z kořenů, druhý nedává smysl. Výběr kořene určuje konstanta a, tj. zda řešíme konvexní/konkávní parabolickou funkci (tj. kvantil pro $p < 1/2$ resp. $p > 1/2$).
- Všimneme si, že $A + 2B$ je *aritmetický průměr* čísel A a $A + 4B$, zatímco $\sqrt{D} = \sqrt{A(A+4B)}$. je jejich *geometrický průměr*.
- Připomeňme, že mezi průměry platí nerovnost $\mathrm{GP} \leq \mathrm{AP}$ a podle Eukleidovy věty o výšce je náš GP roven výšce pravoúhlého trojúhelníku, v němž pata výšky dělí přeponu právě na úseky délek A a $A + 4B$.

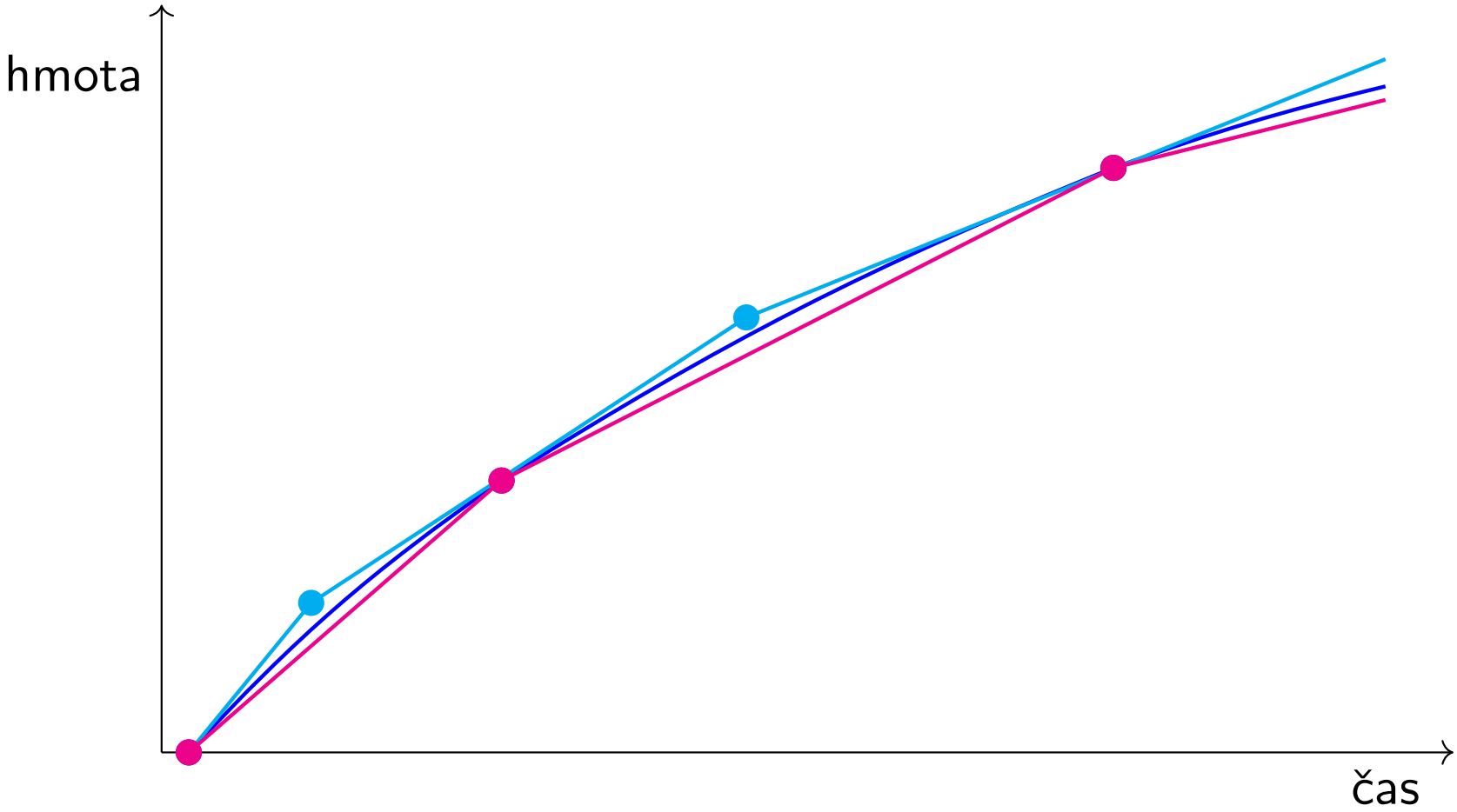
Eukleidova věta o výšce a AG nerovnost



Lineární aproximace paraboly

- Kvůli kombinaci požadavků na horní/dolní odhad a konvexnost/konkávnost potřebujeme umět parabolu aproximovat zvenku i zevnitř.
- Z mnoha možností dáme přednost řešení, kde
  - zpřesnění aproximace se provede zjemněním dělení — chceme jen přidat nové události a nezahazovat výpočty pro staré,
  - koeficienty aproximačních přímek budou racionální — tím se odbourá část problémů s počítačovým zaokrouhlováním u reálného typu.
- Vnější aproximace je náročnější — po nalezení dotykových bodů musíme ještě počítat tečny a jejich průsečíky.

Vnitřní a vnější aproximace



Racionální aproximace

- Druhý požadavek je konkrétněji položen takto: místo výpočtu odmocninou

$$n = \frac{(A + 2B) \pm \sqrt{A(A + 4B)}}{2}$$

hledáme přibližné řešení ve tvaru

$$n \approx k_1 A + k_2 B,$$

kde k_1, k_2 jsou racionální.

- K tomu je zřejmě dostatečné a nutné, abychom našli hustou podmnožinu bodů na Thaletově kružnici, v níž bude poměr výšky (GP) k přeponě (2AP) racionální.

Pythagorejské trojice

- *Pythagorejskou trojicí* rozumíme trojici přirozených čísel (a, b, c) splňujících Pythagorovu větu:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

- Pythagorejské trojice lze triviálně množit vynásobením přirozeným číslem.
- Nesoudělné trojice se nazývají *primitivní*, tj. nejsou výsledkem netriviálního násobení jiné PT. Je známo, že i primitivních trojic je nekonečně mnoho.
- Pokud prvočíslo p dělí dvě strany, musí dělit i stranu třetí. Nesoudělnost v PT tedy stačí testovat na libovolných dvou stranách.
- Eukleides dokázal, že pro $x, y \in \mathbb{N}, x > y$ je trojice

$$(x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$$

pythagorejská a všechny PT vzniknou tímto způsobem.

Posloupnosti pythagorejských trojic

- V Eukleidově klasifikaci můžeme volit speciální x, y a tvořit posloupnosti PT, např.
  - Pythagorova posloupnost, $x = y + 1$:

    $$(3, 4, 5), \quad (5, 12, 13), \quad (7, 24, 25), \quad (9, 40, 41), \quad \ldots$$

  - Platónova posloupnost, $y = 1$:

    $$(3, 4, 5), \quad (8, 6, 10), \quad (15, 8, 17), \quad (24, 10, 26), \quad \ldots$$

- Pythagorovu posloupnost lze až na násobek zadat volbou $y = 1/2$.
- Zaměříme se na posloupnosti s konstantním y a ještě konkrétněji na posloupnosti s $y = 2^k$. Lze ukázat, že zvýšením $k - 1 \to k$ „půlíme“ předchozí iteraci $y = 2^{k-1}$, tj. pro stávající PT zdvojnásobíme index v posloupnosti a nové PT vkládáme na liché pozice.
- V každé posloupnosti se zmenšuje úhel při jednom z vrcholů (a u druhého zvětšuje). Jedná se tak o pohyb po oblouku Thaletovy kružnice (a potažmo po parabole v původní úloze).

Topologie pythagorejských trojic

- Lze klasifikovat dvojice (x, y), které generují primitivní PT.
- Nás primitivita moc nezajímá, potřebujeme hlavně nějak generovat vzájemně nepodobné PT.
- Distribuce reprezentací PT na kružnici, v Gaussově celočíselné rovině, atp. nápadně připomínají konstrukci množiny racionálních čísel a její vložení do $\mathbb{R}$. Krácení zlomků odpovídá redukci PT na primitivní. V rámci teorie PT jsou známy různé zajímavé reprezentace a transformace.
- Pro nás je podstatné, že pravoúhlý vrchol skutečně vykresluje pro PT na Thaletově kružnici hustou podmnožinu, jak jsme potřebovali. Jinými slovy, každý pravoúhlý trojúhelník je v určitém smyslu limitou pythagorejských.
- Hustá je i množina získaná speciálními volbami $y = 2^k, k\mathbb{N}$. (To je analogie faktu, že zlomky tvaru $z/(2^k)$ tvoří hustou podmnožinu v $\mathbb{R}$.)

Komentáře k validaci I

- Kombinací odhadů kvantilů a lineárních aproximací paraboly bychom měli získat algoritmus pro validaci zásobníku v pravděpodobnostním prostředí. Strategie výpočtu založená na přidávání událostí v neobjasněných intervalech zůstává stejná. (Problém čeká na dokončení.)
- Ve srovnání se simulací Monte Carlo má lineární validace výhody:
  - Poskytuje stále stejné výsledky a neprojevuje se efekt statistické chyby generovaných dat.
  - Pro rozsáhlejší kampaně a/nebo větší rozptyl očekáváme rychlejší výpočet.

  A nevýhody:
  - Nevidíme skutečný projev kolizí na celkové zpomalení toku — nepočítáme LT.
  - Pro menší dávky/rozptyl může být rychlejší zkusit MC.
- Téma k zamyšlení/práci: kde je ta hranice?

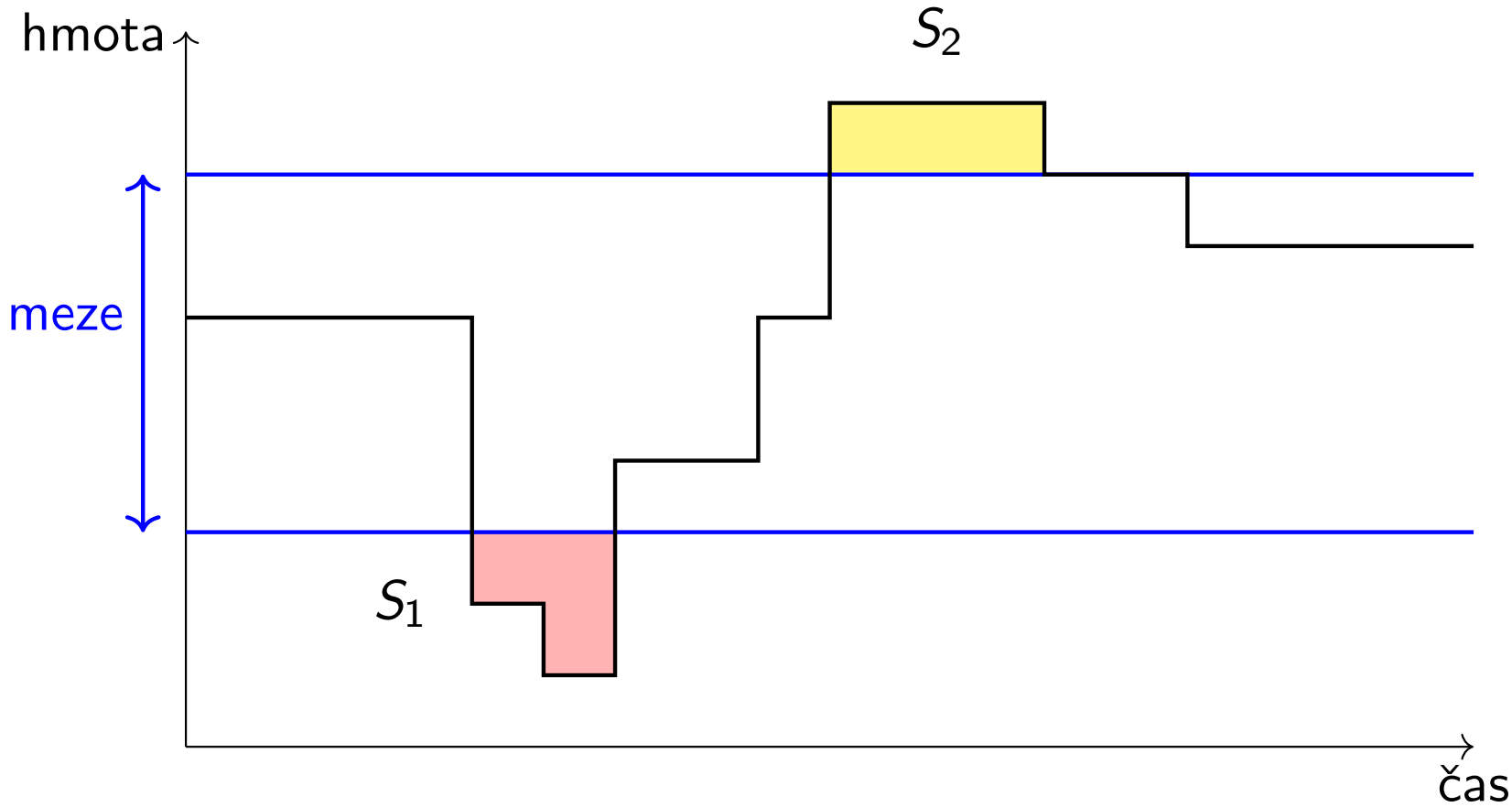
Komentáře k validaci II

- Připomeňme, že validace zásobníků lineárními aproximacemi se vyplácí pro výrobu se „střední pravidelností“. Vysoce pravidelná výroba (linky, nepřetržitý provoz) nezná kolize, kusová výroba nezná opakované procesy.
- V kusové výrobě se nahodilost často vyskytuje. Součet veličin na hmotové ose se popsanou metodou určitě nevyplatí (a navíc je nepřesný), rozumné je použít diskrétní konvoluci.
- Stejná poznámka se může týkat i situací, kde rozptyl a/nebo velikost kampaně je menší a hmotové rozdělení tak má malý *nosič*.
- V praxi se často řeší obrácená úloha „zjistit minimální kapacitu zásobníku / počáteční zásoby“. V našem pojetí odpovídá stanovení mezí tak, aby se simulovaný signál (s požadovanou spolehlivostí) mezi ně vešel.

Defekt

- Validací zásobníky jsme schopni měřit i míru selhání — velikost plochy v čase a hmotě. Opět se můžeme spokojit i s prostým odhadem aproximacemi.
- Přiřazením *váhy* příslušnému selhání (kolize) definujeme *defekt*.
- Defekt tedy číselně vyjadřuje míru problému, tj. jak moc nám kolize vadí.
- Defekty jsou sice nežádoucí, ale mohou být nevyhnutelné a stanou se předmětem úvah typu „něco za něco“.
- Je tedy vhodné rozmyslet si co nejširší váhové ohodnocení zásobníků.
- *Souhrnný defekt* je součet všech defektů. Je možné ho považovat za *účelovou funkci* pro optimalizaci plánu.

Ilustrace defektů



$$w_1 S_1 + w_2 S_2$$

Příklady defektu

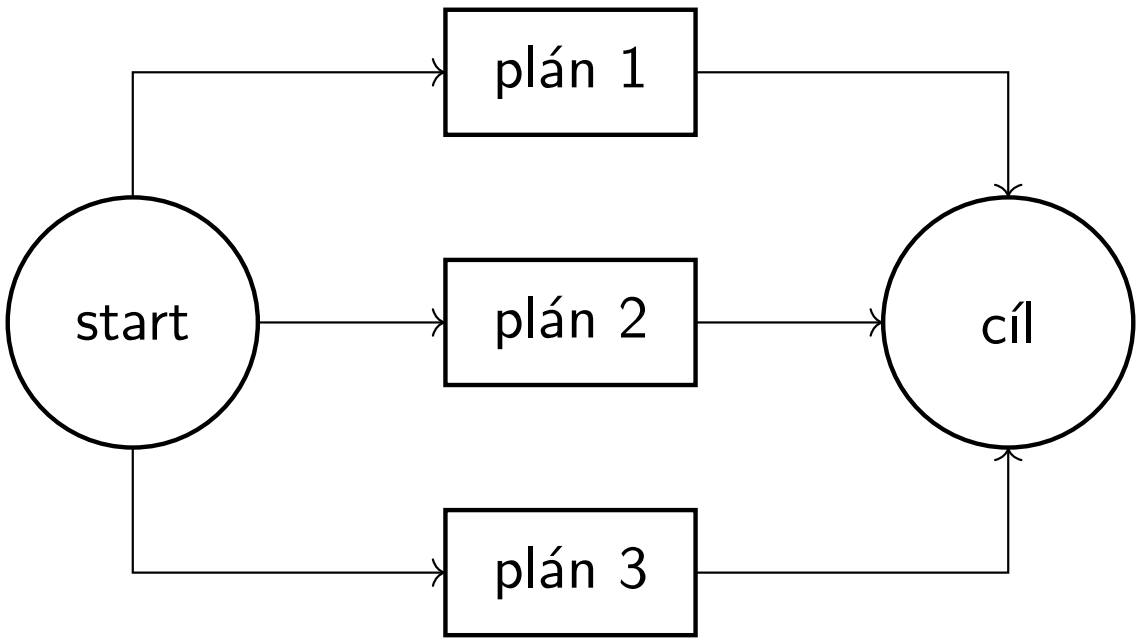
- „Základní“ příklad — podtečení nebo přetečení zásobníku s materiálem. Nelze vyrábět kvůli hladovění nebo blokování procesu.
- Nevyužitá kapacita zařízení — pokutujeme stav vyčkávání (idle), tj. vytvoříme pro stroj zásobník, v němž je stav 0 horní mezí a stav 1 je už vnímán jako „přetečení“.
- Kolize procesů na zařízení — stejný zásobník jako výše, ale kolizí z něj odebíráme stroj „dvakrát“. Ve výsledku je tak v zásobníku „-1 připravených strojů“. Stav pokutujeme jako nežádoucí podtečení dolní meze 0.
- Nesprávný režim stroje — pro proces můžeme vytvořit virtuální zásobník, kam si proces „odplivuje“, abychom nemuseli měnit způsob výpočtu defektu.
- Nedodržení termínu expedice — kolize posledního výrobního procesu a procesu expedice na zásobníku se zakázkou.
- Bonifikace rychlé výroby — stanovíme si nesplnitelný „vnitřní deadline“ a řešíme stejně jako předchozí.

Obecnější způsoby definice defektu

- V pravděpodobnostním prostředím můžeme defekt rozčlenit podle kvantilů a přirozeně tak navíc vážit pravděpodobnostní mírou, což vyjadřuje průměrný příspěvek jednoho náhodného běhu k defektu.
- Pokutování za defekt může být progresivní — tj. malé překročení vadí málo, větší překročení je průšvih. Princip výpočtu je podobný jako u předchozího.
- Při agregaci nemusí být „celková nelibost“ prostým součtem přispívajících defektů. Lze vytvořit pomocný zásobník pro sdružený stav a stanovit pro něj váhu. Příklad: Úloha o vlku, koze a zelí. Čtyři konstelace jsou přijatelné, čtyři nejsou. Defekt není možné vyjádřit prostým součtem „po zvířatech“.
- Pokud si představíme tok rozložený na jednotlivé výrobky, odpovídající zásobníky, pravděpodobnostní běhy, atd., zjistíme, že stále řešíme tentýž obecný problém.

Souhrnný defekt plánu

- Podle předchozího získáme souhrnný defekt jako součet všech dílčích defektů (vážené plochy), tj. předpokládaných ztrát.
- Pro všechny myslitelné kolize je třeba stavit váhu, což může být nesnadné a pracné.
- Za předpokladu stejného zisku za vyhotovení smluvené zakázky je tak souhrnný defekt rozdílovým kriteriem pro výběr lepšího plánu.



Optimalizace I

- Cílem *optimalizace* je minimalizace účelové funkce při dodržení omezení.
- *Omezení* jsou pevná, jejich překročením bychom se dostali mimo prostor *přípustných řešení*.
- Neštěstí optimalizace: Globální optimum obvykle není „sjednocením“ lokálních optim. Nicméně v některých případech lze předpokládat určitou nezávislost komponent a úlohu rozdělit.
- Optimalizační metody obvykle postupují prostorem přípustných řešení a snižují účelovou funkci.
- Spoustu práce může ušetřit vhodná volba počátečního plánu.

Optimalizace II

- Úspěšnost metody lze vyjádřit počtem cyklů — čím méně, tím lépe.
- Užitečná je schopnost vědět „kam jít“ — volba pivota v simplexovém algoritmu lineárního programování, metoda největšího spádu, atd.
- Pokud množina přípustných řešení není rozumně parametrizovatelná, volba slibného směru nemusí být možná.
- Optimalizace pak probíhá metodou pokus/omyl, je zdlouhavá a nabízí se ukončení v suboptimálním řešení.

Simulované žíhání

- Podstatou *simulovaného žíhání* je „ochota“ provádět velké (a riskantní) změny spíš na začátku optimalizace. Postupně se tato ochota zmenšuje — chlazení.
- Změnou v plánu rozumíme např. přesun úkolu v čase (vodorovný posun v Ganttovi), výměnu úkonů ve frontě, velkou změnou může být obdoba pro složený proces (např. výměna celého středečního rozvrhu za úterní).
- Ochotou ke změně rozumíme pravděpodobnost, algoritmus je náhodný.
- Pokud je nalezené řešení lepší než předchozí, určitě jej bereme. Pokud je horší, pokračujeme v průzkumu s aktuální pravděpodobností.
- Po čase se pravděpodobnost sníží natolik, že už se žádná změna téměř jistě nestane — zamrznutí.
- Velké skoky jsou užitečné jako možnost opustit oblast prostoru řešení směřující k „méně optimálnímu“ lokálnímu minimu.

Metrizace prostoru plánů

- Pro potřeby simulovaného žíhání je vhodné zavést *metriku* na prostoru plánů měřící jejich odlišnost.
- Nabízí se měřit vzdálenosti odpovídajících událostí v časoprostorohmotě, tedy velikost souhrnné deformace měnící jeden plán na druhý.
- Problém může být zajímavý v kategoriálnímu vyjádření — plány jsou funktory, události jsou propojeny morfismy přirozené transformace.
- Není doděláno, prostor pro výzkum.
- U simulovaného žíhání mohou pomoci „zjevné korekční tahy“, např. posunutí procesů ve frontě, aby k sobě přiléhali podle procesních časů. (Při vyšší složitosti sítě ale mohou něco rozbít jinde.)

Shrnutí řešené problematiky

- Validace — hledání kolizí v toku, odpovědi typu ano/ne, případně pravděpodobnost.
- Evaluace — kolize jsou měřeny a je jim přisouzena váha, výsledek nazýváme defekt. Součet všech defektů dává hodnocení toku.
- Optimalizace — změnou plánu se snažíme snižovat celkový defekt a najít (sub)optimální řešení.

Jazyk toku

- Pokusíme se přepsat tok do kódu.
- Kód je současně datovým záznamem i jistým „programem“ — lze podle něj naplánovat a spustit výrobu, nebo aspoň její simulaci.
- Kód může být předmětem dalšího zpracování — rozvinutí, zobecnění, optimalizace, atd. Princip *funkcionálního programování*.
- Potřebujeme popsat procesy i zásobníky. Připomeňme, že tok lze konstruovat jako diagram $D : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$, kde $\mathcal{K}$ je kategorie zdrojů spojených procesy.
- Skládání lze dobře vystihnout *značkovacím jazykem*, pro rychlé vyhledávání jsou vhodné *relační databáze*.
- Pro vodorovné/svislé oddělovače položek použijeme csv notaci, tj. čárky/středníky.

Principy přepisu

- Programujeme „objektově“, tj. uděláme si základní kostru, pak rozepisujeme detaily.
- Rozmysleme si, kdy procesy probíhají nebo zdroje se spotřebovávají v daném pořadí a kdy je pořadí zaměnitelné.
- Každý proces „nahlíží“ na zdroje určitým typem a úrovní agregace. Vzniká u něj *složený zásobník* (vysvětlíme na příkladech).
- Opakované procesy vyjádříme cyklem (s počtem opakování příslušnému velikosti kampaně).

Označení pro kompozice

- $\{a, b, c\}, n * \{a\}$ — typ (multi)množina, složky jsou nezávislé, zaměnitelné, proveditelné paralelně, je asociativní i komutativní:

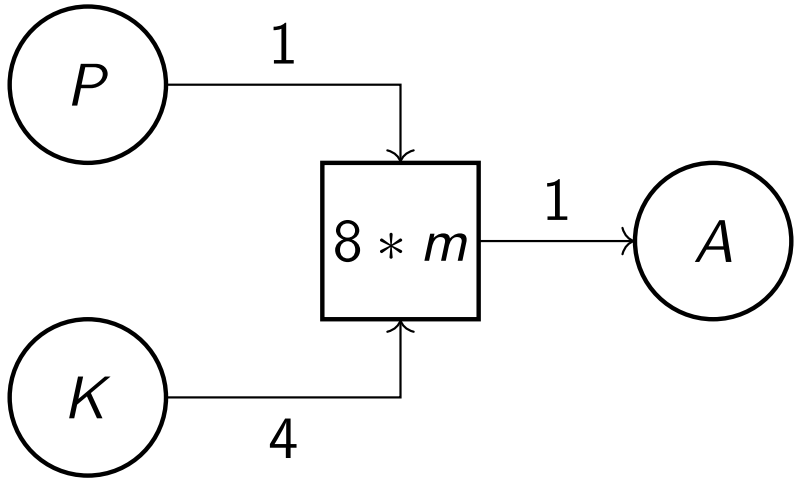
$$\{a, b\} = \{b, a\}, \qquad \{\{a, b\}, c\} = \{a, \{b, c\}\}$$

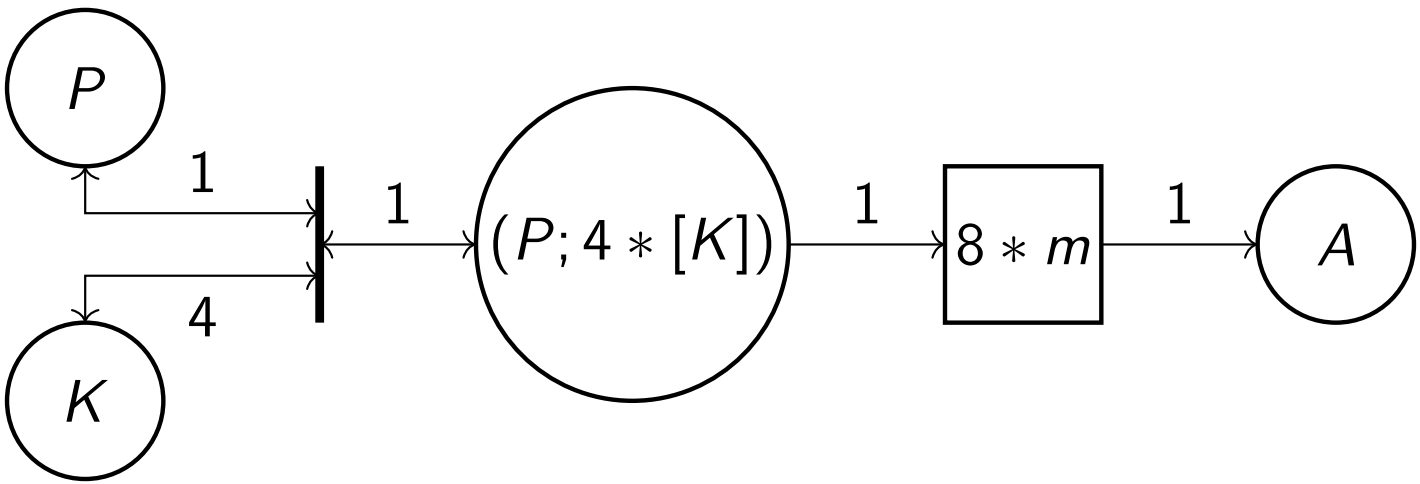
- $(a, b, c), n * (a)$ — typ uspořádaná n-tice/seznam, pevné řazení složek, sériové provedení v daném pořadí, jen asociativní:

$$((a, b), c) = (a, (b, c))$$

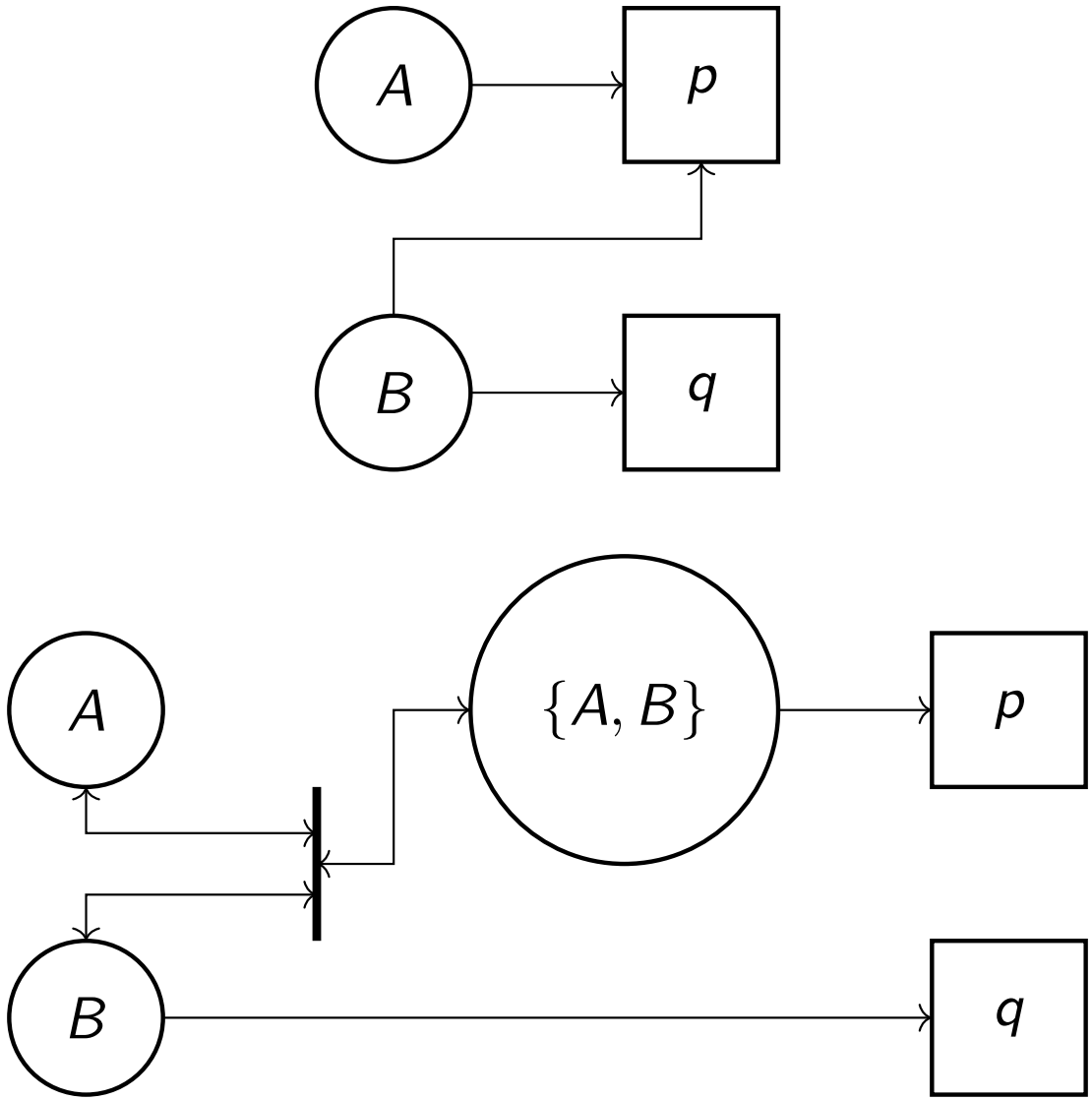
- $[a, b, c], n * [a]$ — podobné jako kulatá závorka, ale není ani asociativní, složky jsou zpracovány nerozbalené, závorka chrání svůj obsah před „rozpuštěním“ do nadřazeného výrazu.

Příklad s virtuálním supermarketem I





Příklad s virtuálním supermarketem II



Databáze procesů

vstup	proces	výstup
$(A; 3 * [B])$	p	C
C	q	$(D; E)$
$(A; 3 * [B])$	(p, q)	$(D; E)$

- Jazyk zatím v náznaku, zřejmě bude ještě nutné rozlišit horizontální a vertikální skládání.
- „Přepážkový“ proces ve schématech je obousměrný a jen překládací (analogie s polními částicemi).
- Závorky odpovídají standardním databázovém operacím sjednocení a spojení.
- Vše směřuje k relačnímu popisu toku. Kategorie **Rel** je dagger kompaktní stejně jako konečné vektorové prostory.
- Propojení s jazykem kvantových protokolů vypadá velmi nadějně.