2. domácí úkol - MIN 101 (jaro 2024)

Odevzdat do 5.11.

1. Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů B, C trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A = [-3, 3]$, průsečík výšek $V = [3, 3]$ a težiště $T = [5, 5]$.

   Řešení:

   Nejdříve z bodů A, T určíme střed A_1 strany BC. Máme tedy

   $$A_1 = A + \frac{3}{2}\,(AT) = [-3, 3] + \frac{3}{2}(8, 2) = [9, 6].$$

   Ze zadání lze vidět, že přímka a prochází bodem A_1 a její normálový vektor je $AV = (6, 0)$. Ten je rovnoběžný s vektorem $(1, 0)$. Pro přímku a tedy platí

   $$a : X = [9, 6] + t(0, 1),$$

   kde $t \in \mathbb{R}$.

   Jelikož je A_1 střed strany BC, platí $B[9, 6+t_0], C[9, 6-t_0]$, pro některé $t_0 \in \mathbb{R}$ (bez hodnoty 0). Z podmínky kolmosti vektorů BC, AC, platí pro jejich skalární součin následující rovnost

   $$BV \cdot AC = 0,$$
   $$(-6, -3 - t_0) \cdot (12, 3 - t_0) = 0.$$

   Řešením jsou dva kořeny $t_0 = 9$ and $t_0 = -9$, z čehož dostáváme všechny hledané vrcholy $B = [9, 15]$, $C = [9, -3]$, respektive jejich varianty s druhým kořenem $[9, -3]$, $[9, 15]$.

2. **(Bonusový příklad)**

Světelný paprsek se pohybuje podél přímky $p_1 : x - 2y + 5 = 0$. Při dosažení přímky $p_2 : 3x + 2y + 7 = 0$ je paprsek odražen. Nalezněte rovnici přímky, která obsahuje reflektovaný paprsek.

Nápověda: Pokuste se využít obecný tvar pro reflexi bodu vzhledem k přímce

$$\frac{x_m - x}{a} = \frac{y_m - y}{b} = -2\left(\frac{ax + by + c}{a^2 + b^2}\right),$$

kde (x_m, y_m) je reflexe bodu (x, y), vzhledem k přímce $ax + by + c = 0$.

Řešení:

Předpokládejme, že libovolný bod (x, y) leží na přímce p_1. Pak pro získání jeho reflexe podél přímky p_2 stačí využít uvedené vztahy. Dostáváme

$$x_m = -2 \cdot 3\left(\frac{3x + 2y + 7}{13}\right) + x,$$

$$y_m = -2 \cdot 2\left(\frac{3x + 2y + 7}{13}\right) + y.$$

Vyjádřeme nyní z těchto dvou rovnic proměnné x, y jako

$$x = \frac{-5x_m - 12y_m - 42}{13},$$
$$y = \frac{-12x_m + 5y_m - 28}{13}.$$

Tyto proměnné postačí dosadit za souřadnice libovolného bodu do přímky p_1, což dává

$$19x_m - 22y_m + 79 = 0.$$

Jinými slovy, bod (x_m, y_m) leží na přímce $19x - 22y + 79$.

Zpětně lze ověřit, že náš postup je správný, jelikož dosazením souřadnic reflektovaného bodu do původní přímky, obdržíme rovnici pro reflektovanou přímku. K tomuto dochází z toho důvodu, že bod (x, y) je reflexe bodu (x_m, y_x) podél přímky $3x + 2y + 7$.

Pro zajímavost zde přikládám také odvození výše uvedené formule pro reflexi bodu podél přímky, kde jsou uvedené veškeré detaily.

Reflexe bodu podél přímky

Mějme přímku $ax + by + c = 0$ a bod $P = (x_1, y_1)$. Zrcadlovým obrazem bodu P (reflexí) dle $ax + by + c = 0$, bude bod $Q = (x_2, y_2)$ tak, že přímka PQ je kolmá k $ax + by + c = 0$ a zároveň střed K přímky PQ leží na přímce $ax + by + c = 0$.

Víme, že sklon přímky $ax + by + c = 0$ je dán jako $\frac{-a}{b}$. Tudíž sklon přímky PQ je $\frac{b}{a}$. Jestliže přímka PQ svírá s osou x úhel α, pak z definice goniometrických funkcí platí následující vztahy

$$\tan(\alpha) = \frac{b}{a},$$

tudíž

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$
$$\cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Rovnici přímky PQ lze pak napsat jako

$$\frac{x - x_1}{\cos(\alpha)} = \frac{y - y_1}{\sin(\alpha)}.$$

.

Pokud $PK = r$, pak platí

$$\frac{x - x_1}{\cos(\alpha)} = \frac{y - y_1}{\sin(\alpha)} = r.$$

Jinými slovy, souřadnice bodu K jsou $(x_1 + r\cos(\alpha)), (y_1 + r\sin(\alpha))$, jelikož K leží na $ax + by + c = 0$.

Tudíž

$$a(x_1 + r\cos(\alpha)) + b(y_1 + r\sin(\alpha)) + c = 0.$$

Z této rovnice lze vyjádřit proměnnou r, čímž získáme

$$r = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha)}.$$

Dosazením goniometrických vztahů pro funkce cos a sin, získáváme z předchozím rovnice

$$r = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Pro souřadnice bodu Q zároveň platí

$$\frac{x - x_1}{\cos(\alpha)} = \frac{y - y_1}{\sin(\alpha)} = 2r,$$

tedy

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = -\frac{2(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}.$$

Poslední rovnice reprezentuje bod Q, jakožto obraz (reflexi) bodu (x_1, y_1) podél přímky $ax + by + c = 0$.