5. domácí úkol - MIN 101 (jaro 2024)

Odevzdat do 30.12.

1. **(Fibonacciho posloupnost a zlatý řez)** Vyřešte následující diferenční rovnici
$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0, \tag{1}$$
s počátečními podmínkami $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

   Pokuste se rovněž ukázat, asymptotické chování poměru $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ v limitě $n \to \infty$ dává zlatý řez.

2. Pomocí nehomogenní diferenční rovnice prvního řádu odvoďte vzorec pro konečný součet všech kvadrátů
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

   Nápověda: Vypsáním prvních několika členů součtu S_n se pokuste zjistit jak vypadá příslušná diferenční rovnice. Následně využijte klasický aparát pro řešení těchto rovnic s kvazipolynomiální pravou stranou.

   Nebo se pokuste využít diferenční operátor a sestavit polynom pro n-tý člen odpovídající posloupnosti.

3. **(Bonusový příklad)** Model pro vývoj populace je možné reprezentovat pomocí diskrétní diferenční rovnice
$$P_{n+1} = rP_n \left(1 - \frac{P_n}{K}\right),$$
kde P_n je stav populace v čase $t = n$, r je rychlost růstu a K reprezentuje nosnou kapacitu prostředí. Nosná kapacita prostředí reflektuje míru toho, s jakou prostředí a jeho zdroje dokáží udržovat růst populace.

   Pokuste se najít řešení daného populačního mmodelu pro P_n a následně ukázat, jaké jsou kritické hodnoty daného modelu, tedy jaký bude vývoj populace v závislosti na r a K.

   Nápověda: Chápejte populační model jako homogenní diferenční rovnici s konstantními koeficienty (rychlost růstu populace r a nosnost prostředí K jsou konstanty - nemění se v čase). Jejím vyřešením obdržíte uzavřenou formu pro P_n.