2. domácí úkol – MIN301 – podzim 2022 – odevzdat do **18.11.2022**

Uvažme kruh $D \subset \mathbb{R}^2$ se středem $[1,1]$ a poloměrem 1 a dále množinu

$$A = \{[x,y] \in D \,|\, y \leq e^x,\ \ y \leq \tfrac{3}{2},\ \ y \geq x\}$$

a integrál $I = \iint_A f(x,y)dxdy$ pro spojitou funkci $f(x,y)$ dvou proměnných. Popište meze pro jednotlivé souřadnice při výpočtu I při obou možných pořadích integrace, tj.

(a) napište I jako integrál $\int_*^* \int_*^* f(x,y)dxdy$ (nebo součet více takových integrálů), kde místo $*$ doplníte vhodné meze,

(b) napište I jako integrál $\int_*^* \int_*^* f(x,y)dydx$ (nebo součet více takových integrálů), kde místo $*$ doplníte vhodné meze.

Dále určete extrémy funkce $g(x,y) = x - y$ na množině A. (Jako nápovědu poznamenejme, že A je kompaktní množina.)

Řešení: Hranice oblasti A je tvořena částí přímky $y = x$, částí kružnice (hranice kruhu D), částí křivky $y = e^x$ a částí přímky $y = 3/2$, přičemž „vrcholy“ jsou $[3/2, 3/2]$, $[-\frac{\sqrt{2}}{2}+1, -\frac{\sqrt{2}}{2}+1]$, $[0,1]$ a $[\ln(3/2), 3/2]$. (Nakreslete si obrázek!) Hranice kruhu D je dána grafem křivek $y = 1 \pm \sqrt{x(2-x)}$. Tedy na jednu stranu máme

$$I = \int_0^{-\frac{\sqrt{2}}{2}+1} \int_{1-\sqrt{x(2-x)}}^{e^x} f(x,y)dydx + \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}+1}^{\ln(3/2)} \int_x^{e^x} f(x,y)dydx + \int_{\ln(3/2)}^{3/2} \int_x^{3/2} f(x,y)dydx$$

a na druhou stranu máme

$$I = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}+1}^{1} \int_{1-\sqrt{y(2-y)}}^{y} f(x,y)dxdy + \int_1^{3/2} \int_{\ln y}^{y} f(x,y)dxdy.$$

Na kompaktní množině nabývá funkce $g(x,y)$ svého maxima a minima. Tato funkce $g(x,y)$ nemá lokální extrémy, tedy se maximum a minimum realizuje na hranici A. Podobnou úvahou pro jednotlivé hraniční křivky dojdeme k tomu, že maximum a minimum se realizuje v některém z výše uvedených „vrcholů“ na hranici. Máme

$$g(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}) = 0, \quad g(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}+1, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}+1) = 0, \quad g(0,1) = -1, \quad g(\ln(\tfrac{3}{2}), \tfrac{3}{2}) = \ln(\tfrac{3}{2}) - \tfrac{3}{2}$$

kde $\ln(\frac{3}{2}) - \frac{3}{2} < -1 < 0$. První dvě hodnoty na předchozím řádku také napovídají, že $g(x,y) = 0$ pro všechny body na přímce $y = x$. Tedy funkce $g(x,y)$ má na množině A minimum v bodě $[\ln(\frac{3}{2}), \frac{3}{2}]$ a maximum ve všech bodech úsečky $y = x$ mezi body $[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ a $[-\frac{\sqrt{2}}{2}+1, -\frac{\sqrt{2}}{2}+1]$.