4. domácí úkol – MIN301 – podzim 2022 – odevzdat do **9.12.2022**

Řešte diferenciální rovnici

$$y' = y^2 - e^{3x}y^2$$

s neznámou funkcí $y(x)$. Konkrétně,

a) Popište všechna řešení zadané rovnice.

b) Určete řešení $y(x)$ splňující počáteční podmínku $y(0) = 1$ včetně definičního oboru funkce $y(x)$.

c) Rozhodněte, pro které c existuje řešení splňující počáteční podmínku $y(0) = c$ definované na celé reálné ose.

Řešení:

a) Proměnná lze separovat a rovnici řešit integrací, obecné řešení je tvaru

$$y(x) = \frac{1}{-x + \frac{1}{3}e^{3x} + C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

spolu s konstantním řešením $y = 0$.

b) Z podmínky $y(0) = 1$ dopočítáme $C = \frac{2}{3}$. Definiční obor, pro obecné C, je omezen podmínkou $f(x) := -x + \frac{1}{3}e^{3x} + C \neq 0$. Derivací funkce $f(x)$ zjistíme, že tato funkce má globální minimum v bodě $x = 0$ a toto minimum je $f(0) = \frac{1}{3} + C$, což je kladná hodnota pro $C = \frac{2}{3}$. Tedy definiční obor řešení

$$y(x) = \frac{1}{-x + \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}}$$

je $(-\infty, \infty)$.

c) Z předchozího vidíme, že obecné řešení má definiční obor $(-\infty, \infty)$ pro $C > -\frac{1}{3}$. Tedy $y(0) = \frac{1}{1/3+C} = c$, tj. $C = \frac{1}{c} - \frac{1}{3} > -\frac{1}{3}$ znamená $c > 0$. Spolu s konstantním řešením $y(x) = 0$ tedy dostaneme závěr $c \geq 0$.