1. domácí úkol – MIN301 – podzim 2023 – odevzdat do **13.10.2023**

Spočtěte následující limity nebo ukažte, že limita neexistuje:

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sin x \sin y}$.
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$.
4. $\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{2x^3+3x(y-1)^2+4x(z-2)^2}{x^2+2(y-1)^2+3(z-2)^2}$.

Řešení:

1. Vynásobením čitatele i jmenovatele výrazem $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ a po následující úpravě zjistíme, že limita je rovna nule.
2. Když se k bodu $(0,0)$ blížíme po přímce (x, cx), dostaneme
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2+(cx)^2)}{\sin x \sin(cx)} = \ldots = \frac{1+c^2}{c},$$
kde část $\ldots$ je aplikace L'Hospitalova pravidla a využití známé limity $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Tedy limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sin x \sin y}$ neexistuje.
3. Když se k bodu $(0,0)$ blížíme po přímce (x, cx), je limita nulová. Když se ale budeme blížit po parabole (x, x^2), dostaneme
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$
Limita tedy neexistuje.
4. Platí $2x^2+3(y-1)^2+4(z-2)^2 \leq 2(x^2+2(y-1)^2+3(z-2)^2)$, tj.
$$0 \leq \frac{2x^2+3(y-1)^2+4(z-2)^2}{x^2+2(y-1)^2+3(z-2)^2} \leq \frac{1}{2}.$$
Tedy
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{2x^3+3(y-1)^3+4(z-2)^3}{x^2+2(y-1)^2+3(z-2)^2} =$$
$$= \lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} x \cdot \lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{2x^2+3(y-1)^2+4(z-2)^2}{x^2+2(y-1)^2+3(z-2)^2} = 0.$$