

2. domácí úkol – MIN301 – podzim 2023 – odevzdat do **3.11.2023**

Uvažme funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = (x + p)e^{x^2 - y^2}$$

s parametrem $p \in \mathbb{R}$. Určete lokální extrémy této funkce a zároveň určete, pro jaké hodnoty parametru p má tato funkce jeden, dva či více extrémů nebo žádný extrém.

Řešení: Přímým výpočtem zjistíme, že

$$f_x(x, y) = (1 + 2x^2 + 2xp)e^{x^2 - y^2},$$

$$f_y(x, y) = (-2xy - 2py)e^{x^2 - y^2}$$

a

$$f_{xx}(x, y) = (2p + 6x + 4x^3 + 4px^2)e^{x^2 - y^2},$$

$$f_{xy}(x, y) = (-2y - 2x^2y - 2pxy)e^{x^2 - y^2},$$

$$f_{yy}(x, y) = (-2p - 2x + 4xy^2 + 4py^2)e^{x^2 - y^2}.$$

Stacionární body: ze vztahů $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ zjistíme, že $y = 0$ a $2x^2 + 2px + 1 = 0$, tj. stacionární body jsou

$$\left[-\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 2}}{2}, 0\right].$$

Hessián ve stacionárních bodech je

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} \pm 2\sqrt{p^2 - 2} & 0 \\ 0 & -p \mp \sqrt{p^2 - 2} \end{pmatrix}$$

Analýzou pozitivní/negativní definitnosti se zjistí následující:

- Pro $p < -\sqrt{2}$ má funkce f lokální minimum bodě $[-\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 - 2}}{2}, 0]$; v druhém stacionárním bodě je sedlový bod.
- Pro $p > \sqrt{2}$ má funkce f lokální maximum bodě $[-\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2 - 2}}{2}, 0]$; v druhém stacionárním bodě je sedlový bod.
- Pro $p \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ funkce f extrémy nemá.

Tento závěr stačí na splnění domácího úkolu, nicméně není úplný – zbývá určit chování funkce ve stacionárním bodě $[\mp \frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$ pro $p = \pm\sqrt{2}$. Hessián $f''(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ je degenerovaný a tedy potřebujeme analyzovat vyšší derivace. Stačí uvážit funkci jedné proměnné

$$\varphi(x) = f(x, 0).$$

Lehce se ověří, že $\varphi'(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}) = \varphi''(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$, ale $\varphi'''(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}) \neq 0$, tedy funkce f v bodech $[\mp \frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$ extrém nemá.