Graf (V, E) — množina vrcholů (V), množina hran (E)

- neorientovaný $E \subseteq 2^{\binom{V}{2}}$
- orientovaný $E \subseteq 2^{V \times V}$

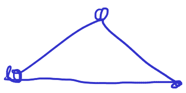
$|V| = n$

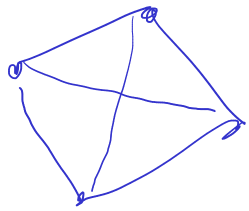
$|E| = \binom{n}{2}$

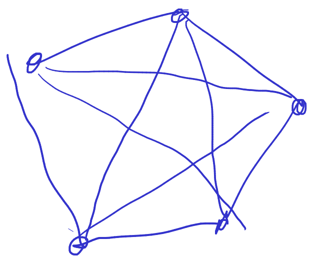
Úplný graf K_n má n-vrcholů

$K_1 =$ 

$K_2 =$ 

$K_3 =$ 

$K_4 =$ 

$K_5 =$ 

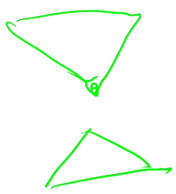
$K_n \Rightarrow$ stupně všech vrcholů jsou $n-1$

Matice sousednosti K_4

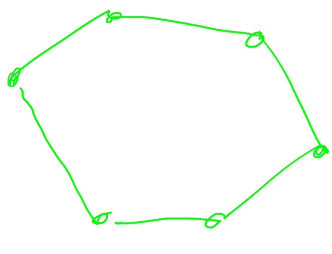
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 4/4$$

Skóre K_4 : $(3,3,3,3)$

NB: Existují neizomorfní grafy se stejným skóre



$(2,2,2,2,2,2)$



C_6

Cyklus C_n délky n

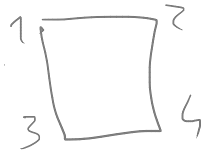
stupně $= 2$

skóre je $(\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{n})$

$|V| = n$

$|E| = n$

C_4



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 4/4$$

matice sousednosti

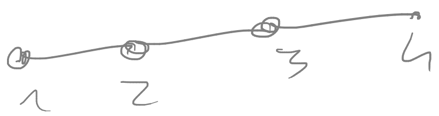
Cesta P_n

skóre $(1, 1, 2, \ldots, 2)$

$(n+1)$ vrcholů

n hran

P_3

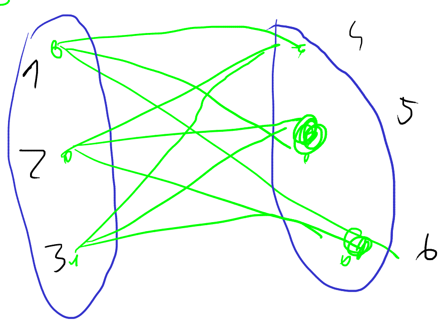


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 4/4$$

bipartitní grafy: $K_{m,n}$

Úplný

$K_{3,3} =$



$|V| = 6$

$|E| = 9$

skóre $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10.2: a) Kolik ex. různých grafů na n vrcholů?

Výsledek: $2^{\binom{n}{2}}$

b) 

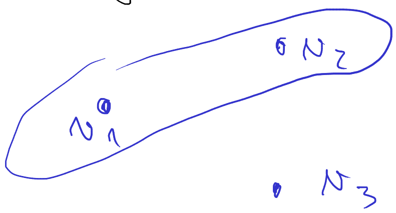
$|V| = m$

$|W| = n$

$\Rightarrow$ počet "povolených" hran je $m \cdot n$

$\Rightarrow$ Výsledek $2^{m \cdot n}$

10.3 a) Kolik ex. různých bipartitních grafů na 3-prvkové množině?

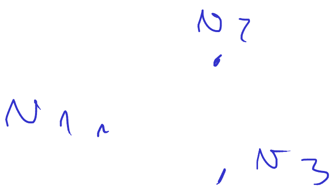


3 způsoby rozdělení na disj. podm.

• Bip. graf = "volba podm. + volba hran" možností

$3 \cdot 4 = 12$

• Bip-graf = "existuje volba podmnožin t.ž. ... "



pouze jeden

$$2^{\binom{3}{2}} - 1 = 7$$

b) Který bipartitní graf na množině n vrcholů má nejvíce hran?

k vrcholů $\qquad$ n-k vrcholů

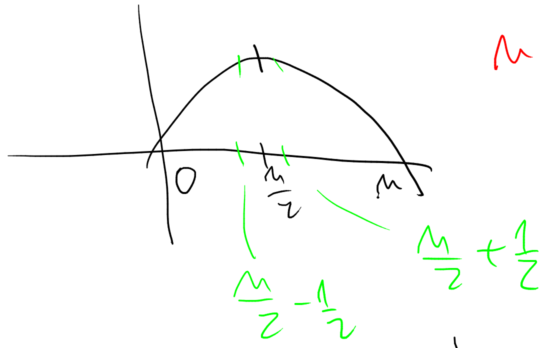
$$\underbrace{f(k)}_{\text{počet hran}} = k(n-k) = -k^2 + nk$$

$k \in \mathbb{N}$

Hledám $\max\{f(k) \mid 1 \leq k \leq n-1\}$

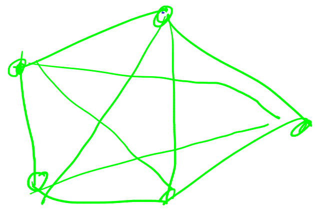
• uvažme nejprve $k \in \mathbb{R}$

$f'(k) = -2k + n = 0 \iff \boxed{k = \frac{n}{2}}$ ok pro n sudé



u lichých $\Rightarrow \boxed{k = \frac{n}{2} \pm \frac{1}{2}}$

Př 104: Určete počet podgrafů v K_5?



0-prvkový: 1

1-prvkové podgraf: 5

$2^{\binom{2}{2}}$

2-prvkové podgrafy: $\binom{5}{2}\cdot 2 = 10\cdot 2 = 20$

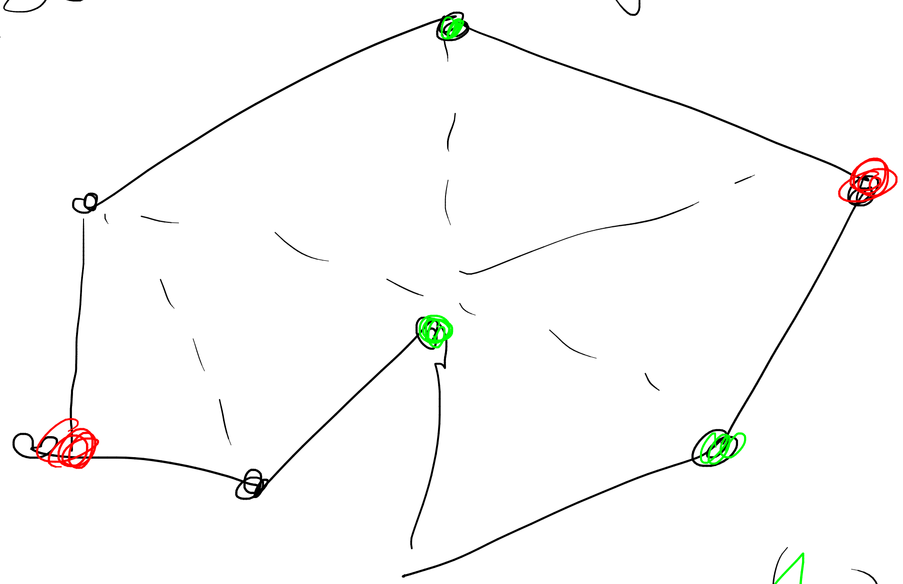
3-prvkové podgrafy: $\binom{5}{3}\cdot 2^{\binom{3}{2}} = \binom{5}{2}\cdot 2^3 = 10\cdot 8 = 80$

4-prvkové podgrafy: $\binom{5}{4}\cdot 2^{\binom{4}{2}} = 5\cdot 2^6 = 5\cdot 64 = 320$

5-prvkový podgraf: $\binom{5}{5} 2^{\binom{5}{2}} = 2^{10} = 1024$

Výsledek: $1024+320+80+20+5+1 = \underline{\underline{1450}}$

10.5: Počet různých cest mezi těmi zvolenými vrcholy v K_7:

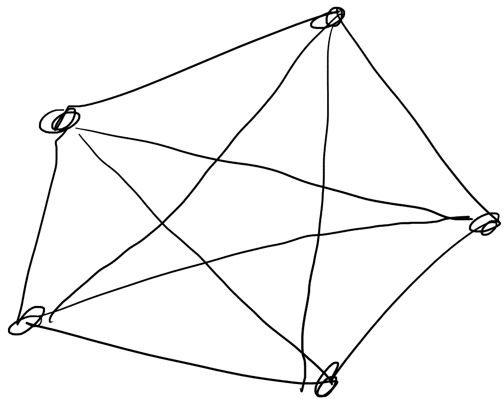


- cesty délky 1. 1
- cesty délky 2: $5 \cdot 1 = 5$
- cesty délky 3: $\binom{5}{2} \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20$
- cesty délky 4: $\binom{5}{3} \cdot 3! = 10 \cdot 6 = 60$
- cesty délky 5: $\binom{5}{4} \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120$
- cesty délky 6: $\binom{5}{5} \cdot 5! = 120$

Výsledek: $120 + 120 + 60 + 20 + 5 + 1$
$= 300 + 26 = 326$

10.6: Kolik ex. různých cyklů v grafu K_5?

K_5

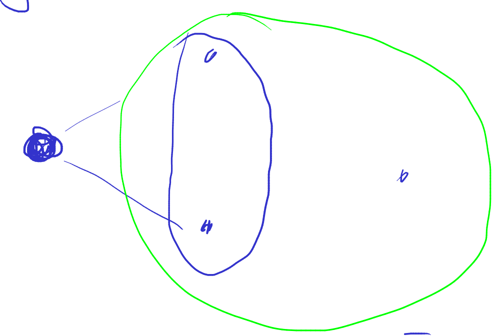


NB: Budeme uvažovat cykly "až na otočení"

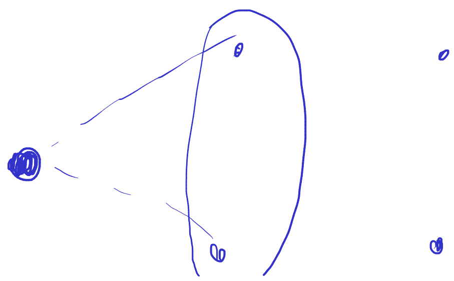
je stejný jako

cykly délky 3: $\binom{5}{3} = 10$

cykly délky 4: $\binom{5}{4} \cdot 3 = 5 \cdot 3 = 15$



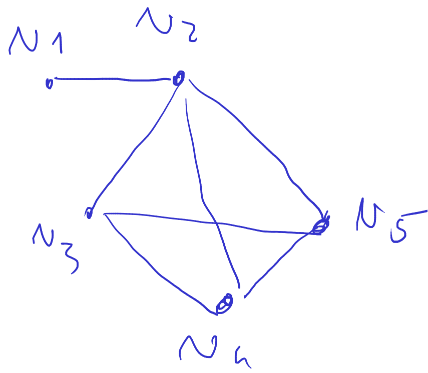
cykly délky 5: $\binom{5}{5} \cdot \binom{4}{2} \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12$



Výsledek: $12 + 15 + 10 = 37$

10.7 Graf na 5-ti vrcholech zadaný maticí sousednosti

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Kolik existují sledů délky 4 mezi vrcholy N_1 a N_2?

A^2 obsahuje počty sledů délky 2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

počty sledů délky 2

$A^4 =$ počty sledů délky 4