Vnitrosemestrální písemka – MIN301 – podzim 2022 – 15. 11. 2022

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (7 bodů) Mějme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}+x-y^2} .$$

Dále uvažme kružnici $K \subseteq \mathbb{R}^2$ se středem v počátku $[0, 0]$ a poloměrem 1.

a) Určete extrémy funkce $f(x, y)$ v rovině $\mathbb{R}^2$.

b) Rozhodněte, zda je tato funkce na $\mathbb{R}^2$ ohraničená zdola nebo shora.

c) Určete extrémy funkce $f(x, y)$ na množině K.

2. (3 body) V rovině uvažme omezenou oblast $A \subseteq \mathbb{R}^2$ mezi křivkami $y = -x^2 + 3x - 2$ a $y = \frac{1}{2}(x - 1)$. Dále mějme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou předpisem $f(x, y) = x$. Nechť I je integrál $I = \iint_A f(x, y)\, dxdy$.

a) Načrtněte množinu A a popište její hranici včetně „vrcholů“ (kde se protínají hraniční křivky).

b) Spočtěte integrál I.

Řešení a bodování:

1. [7 bodů]

a) **[4b]**

- [1.5b] Parciální derivace jsou

$$f_x(x,y) = (-x^2+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}+x-y^2}, \qquad f_y(x,y) = -2y\,\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}+x-y^2}.$$

Stacionární body jsou $[\pm 1, 0]$.

- [1b] Druhé parciální derivace jsou

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= (x^4-2x^2-2x+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}+x-y^2}, \\ f_{xy}(x,y) &= 2y(x^2-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}+x-y^2}, \\ f_{yy}(x,y) &= (4y^2-2)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}+x-y^2}. \end{aligned}$$

- [1.5b] Matice druhých derivací ve stacionárních bodech jsou

$$d^2(1,0) = \mathrm{e}^{2/3}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad d^2(-1,0) = \mathrm{e}^{-4/3}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matice $d^2(1,0)$ negativně definitní, tedy v bodě $[1,0]$ je lokální maximum; matice $d^2(-1,0)$ indefinitní, tedy v bodě $[-1,0]$ je sedlo.

b) **[1b]** Zjevně $f(x,y) > 0$, tedy funkce je zdola ohraničená. Dále

$$\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = \infty,$$

tedy funkce $f(x,y)$ není ohraničená shora.

c) **[2b]** Množina K je dána omezením $x^2+y^2-1=0$, Lagrangeova funkce tedy je

$$L(x,y,\lambda) = \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}+x-y^2} + \lambda(x^2+y^2-1).$$

Její stacionární body jsou

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= (-x^2+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}+x-y^2} + 2x\lambda = 0, \\ L_y(x,y,\lambda) &= -2y\,\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}+x-y^2} + 2y\lambda = 0, \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2+y^2-1 = 0. \end{aligned}$$

V případě $y=0$ dostaneme dvě řešení $[\pm1,0]$. Pro $y\neq 0$ dostaneme z druhé rovnice $\lambda = \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}+x-y^2}$, což po dosazení do první rovnice dává $x^2+2x-1=0$, tj. $x=-1\pm\sqrt{2}$. Vzhledem k poslední rovnici je možné pouze $x=-1+\sqrt{2}$, což vede na další dvě řešení $[-1+\sqrt{2}, \pm\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}]$.
Jelikož je množina K je kompaktní, funkce $f(x,y)$ na ní nabývá maxima a minima. Stačí tedy spočíst funkční hodnotu ve čtyřech stacionárních bodech, což dává

$$f(-1+\sqrt{2}, \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}) = f(-1+\sqrt{2}, -\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}) < f(-1,0) < f(1,0).$$

Tedy v bodech $[-1+\sqrt{2}, \pm\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}]$ má funkce $f(x,y)$ minima na K a v bodě $[0,1]$ má maximum.
Dodatečný komentář: Původní záměr byl mít pouze stacionární body $[\pm1,0]$*, další dva (složitější) stacionární body jsem při přípravě příkladu přehlédl. Proto nalezení stacionárních bodů* $[\pm1,0]$ *spolu se správnou úvahou o kompaktnosti bude stačit na 1.5 bodu.*

2. [3 body]

a) **[1b]** Oblast A je shora ohraničena parabolou $y=-x^2+3x-2$ a zdola přímkou $y=\frac{1}{2}(x-1)$, přičemž „vrcholy“ jsou body $[1,0]$ a $[\frac{3}{2},\frac{1}{4}]$.

b) **[2b]** Počítáme integrál

$$I = \int_1^{3/2}\int_{\frac{1}{2}(x-1)}^{-x^2+3x-2} x\,dydx = \int_1^{3/2} x(-x^2+\tfrac{5}{2}x-\tfrac{3}{2})\,dx = \ldots = \tfrac{5}{3\cdot 64}.$$