Masarykova universita v Brně

Přírodovědecká fakulta

M 1125 ZÁKLADY MATEMATIKY

UČEBNÍ TEXT KE CVIČENÍ

Pavel Horák

Brno 2013

ÚVOD

Tento učební text je sbírkou řešených i neřešených příkladů, které mají sloužit pro potřebu cvičení k předmětu M 1125 Základy matematiky. Uspořádání příkladů je provedeno tak, že odpovídá členění probírané látky v učebním textu k přednášce pro tento předmět. Z něj je rovněž převzata i veškerá symbolika a názvosloví.

Učební text obsahuje více než 600 příkladů a cvičení. Jsou zastoupeny jak ukázkově vyřešené příklady, tak i (a to z převážné části) úlohy určené k samostatnému procvičování. Obtížnost těchto úloh je na základě dlouholetých zkušeností autora zvolena tak, aby odpovídala úrovni a možnostem běžného posluchače prvního ročníku studia učitelství matematiky. Je zařazeno i dostatečné množství jednodušších příkladů, jejichž vyřešení by mělo přinést jisté uspokojení i slabším studentům a tím je dále motivovalo. Zájemce o řešení obtížnějšch úloh, resp. úloh přesahujících rámec zmíněného kurzu je možno odkázat na literaturu uvedenou na konci textu.

Autor textu si je vědom toho, že i přes veškerou péči, kterou jeho přípravě věnoval, se v něm asi občas objeví chyba nebo překlep. Bude proto vděčen za upozornění na jakékoliv nedostatky v textu a uvítá všechny náměty k jeho zlepšení.

Ve cvičení ze Základů matematiky se nejprve opakuje a rozšiřuje středoškolská látka z matematiky. Při tom se předpokládá znalost pouze těch nejzákladnějších středoškolských matematických pojmů, vztahů a vzorců. Na následující straně jsou přehledně uvedeny některé z nich. Tyto vztahy a vzorce (a samozřejmě i některé další) je třeba nejenom bezpečně znát nazpaměť, ale také je nutné je umět i aktivně používat, a to jak "zleva doprava", tak i "zprava doleva".

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $\qquad$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ \dots\ + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$

$(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ \dots\ + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} ab^{n-1} + (-1)^n b^n$

$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$ $\qquad$ $a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$

$a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ \dots\ \cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $(a_1, a_2, a_3, \dots)$

$$s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)$$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ $\qquad$ $\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není def.	0	není def.

ZÁKLADNÍ POUŽITÉ SYMBOLY A OZNAČENÍ

$\mathbf{N}$	přirozená čísla, tzn. $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$
$\mathbf{Z}$	celá čísla
$k\cdot\mathbf{Z}$	množina všech celočíselných násobků čísla k, kde k je pevné celé číslo
$\mathbf{Q}$	racionální čísla
$\mathbf{Q}^+$	kladná racionální čísla
$\mathbf{R}$	reálná čísla
$\mathbf{R}^+$	kladná reálná čísla
$\mathbf{C}$	komplexní čísla
$\mathbf{Z}_m$	množina všech zbytkových tříd podle modulu m
$\langle a, b\rangle$	uzavřený reálný interval, tzn. $\{x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b\}$
(a, b)	otevřený reálný interval, tzn. $\{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ nebo též uspořádaná dvojice prvků
2^A	systém všech podmnožin množiny A
B^A	systém všech zobrazení $A \longrightarrow B$
$\subseteq$	neostrá množinová inkluze
$\subset$	ostrá množinová inkluze

Všechny ostatní použité symboly a označení jsou převzaty z učebního textu pro předmět M1125 Základy matematiky nebo jsou přímo vysvětleny u příslušných příkladů.

I. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Tato část textu obsahuje celkem 15 vyřešených příkladů vztahujících se k probírané problematice. Příklady zachovávají pořadí v jakém jsou jednotlivé celky řazeny za sebou v učebním textu, avšak nejsou formálně rozděleny do kapitol a paragrafů. Každý čtenář jistě i bez nápovědy pozná, kam má který příklad zařadit.

Příklady jsou vybírány s úmyslem ukázat základní obraty a početní postupy používané při řešení konkrétních úloh a cvičení vztahujících se k dané problematice. Vzhledem k omezenému rozsahu textu není samozřejmě možné zařadit všechny typy úloh, které jsou v dalších kapitolách procvičovány.

U některých vyřešených příkladů je formou poznámky uvedeno shrnutí či zobecnění daného problému, resp. upozornění na důležité momenty, které by si při řešení daného typu problémů měl každý uvědomit.

PŘÍKLAD 1. Dokažte, že pro každé reálné číslo $a > 0$ a pro každé celé číslo $n \geq 2$ platí nerovnost:

$$(1+a)^n \ > \ 1 + n \cdot a \, .$$

Řešení: důkaz provedeme matematickou indukcí vzhledem k n. Nechť tedy je $a \in \mathbf{R} \ \wedge \ a > 0$. Pak:

α) dokážeme uvedené tvrzení pro nejmenší možné n (tj. pro číslo 2).
Pro $n = 2$ je: $(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$, protože podle předpokladu je $a^2 > 0$. Vidíme tedy, že pro $n = 2$ dokazované tvrzení platí.

β) předpokládáme, že dokazované tvrzení platí pro $2, \ldots, n-1$ ($n \geq 3$) a budeme dokazovat jeho platnost pro n.
Podle uvedeného předpokladu platí: $(1+a)^{n-1} > 1 + (n-1)\,a$. Dále je $a > 0$ a tedy $1 + a > 0$ a po vynásobení obou stran poslední nerovnosti číslem $1 + a$ tak dostaneme:

$$(1+a)^n > (1 + (n-1)\,a) \cdot (1+a) = 1 + na + (n-1)\,a^2 \, .$$

Ale $(n-1) \cdot a^2 > 0$ (proč?), a tedy: $1 + na + (n-1)\,a^2 > 1 + na$, tzn. dohromady: $(1+a)^n > 1 + n \cdot a$, což jsme měli dokázat.

Poznámka: předchozí příklad je ukázkou důkazu matematickou indukcí. Aby použití matematické indukce při důkazu nějakého tvrzení vůbec přicházelo v úvahu, musí mít toto tvrzení určitý, specifický tvar (za jistých předpokladů platí výrok $V(n)$, pro každé celé číslo $n \geq n_0$). Na druhé straně však, má-li dokazované tvrzení uvedený tvar, neznamená to, že se při jeho důkazu matematická indukce použít musí.

PŘÍKLAD 2. Nechť I je neprázdná indexová množina, nechť A_i (pro $i \in I$) a B jsou množiny. Dokažte, že platí:

$$B - \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B - A_i) \, .$$

Řešení: jedná se o rovnost množin, kterou dokážeme tak, že postupně dokážeme dvě množinové inkluze, a to:

a) "$\subseteq$":

nechť $x \in B - \bigcup_{i \in I} A_i$. Pak je $x \in B$ a zároveň $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$. Tedy, $x \in B$ a zároveň $x \notin A_i$ pro každé $i \in I$, což však znamená, že $x \in B - A_i$ pro každé $i \in I$. Dostáváme tak, že $x \in \bigcap_{i \in I} (B - A_i)$.

b) "$\supseteq$":

$x \in \bigcap_{i \in I} (B - A_i) \implies x \in B - A_i$, pro každé $i \in I \implies x \in B \wedge x \notin A_i$, pro každé $i \in I \implies x \in B \ \wedge \ x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \implies x \in B - \bigcup_{i \in I} A_i$.

Poznámka: uvedené řešení ukazuje typický důkaz množinové rovnosti. Při jeho zápisu obvykle místo slovních komentářů (viz a)) používáme spíše stručnějšího vyjadřování pomocí implikací a dalších logických spojek (viz b)).
Máme-li v dokazování množinových rovností dostatečnou praxi, můžeme často postupovat tak, že uvedenou rovnost dokazujeme "najednou", pomocí řetězce ekvivalentních výroků, jak je ukázáno v následujícím příkladu. Přitom je však třeba v každém kroku pečlivě "hlídat", že skutečně platí obě implikace, tj. jak "$\Longrightarrow$" tak i "$\Longleftarrow$".

Poznamenejme ještě, že při různých množinových úvahách je často potřeba vyjádřit skutečnost, že daný prvek neleží v průniku, resp. sjednocení, resp. rozdílu dvou množin. Zřejmě platí:

$$\begin{aligned} x \notin A \cup B \quad &\Longleftrightarrow \quad x \notin A \;\wedge\; x \notin B \\ x \notin A \cap B \quad &\Longleftrightarrow \quad x \notin A \;\vee\; x \notin B \\ x \notin A - B \quad &\Longleftrightarrow \quad x \notin A \;\vee\; x \in B \end{aligned}$$

Všimněte si, jak se tyto obraty použijí při řešení následujícího příkladu.

PŘÍKLAD 3. Nechť A, B, C jsou množiny. Dokažte, že platí:

$$A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$$

kde symbol $\div$ značí symetrickou diferenci množin, tj.

$$X \div Y = (X - Y) \cup (Y - X)\,.$$

Řešení:

$x \in A \div (B \div C) \quad \Longleftrightarrow$

$x \in [\,A - ((B - C) \cup (C - B))\,] \;\cup\; [\,((B - C) \cup (C - B)) - A\,] \quad \Longleftrightarrow$

$[\,x \in A \;\wedge\; (x \notin B - C \;\wedge\; x \notin C - B)\,] \;\vee$

$[\,(x \in B - C \;\vee\; x \in C - B) \;\wedge\; x \notin A\,] \quad \Longleftrightarrow$

$[\,x \in A \;\wedge\; ((x \notin B \vee x \in C) \;\wedge\; (x \notin C \vee x \in B))\,] \;\vee$

$[\,((x \in B \wedge x \notin C) \;\vee\; (x \in C \wedge x \notin B)) \;\wedge\; x \notin A\,] \quad \Longleftrightarrow$

$(x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \;\vee\; (x \in A \wedge x \in C \wedge x \in B) \;\vee$

$(x \in B \wedge x \notin C \wedge x \notin A) \;\vee\; (x \in C \wedge x \notin B \wedge x \notin A) \quad \Longleftrightarrow$

$[\,(x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \;\vee\; (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C)\,] \;\vee$

$[\,(x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \;\vee\; (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C)\,] \quad \Longleftrightarrow$

$[\,((x \in A \wedge x \notin B) \;\vee\; (x \notin A \wedge x \in B)) \;\wedge\; x \notin C\,] \;\vee$

$[\,x \in C \;\wedge\; ((x \notin A \vee x \in B) \;\wedge\; (x \notin B \vee x \in A))\,] \quad \Longleftrightarrow$

$[\,(x \in A - B \;\vee\; x \in B - A) \;\wedge\; x \notin C\,] \;\vee$

$[\,x \in C \;\wedge\; (x \notin A - B \;\wedge\; x \notin B - A)\,] \quad \Longleftrightarrow$

$x \in [\,((A - B) \cup (B - A)) - C\,] \;\cup\; [\,C - ((A - B) \cup (B - A))\,] \quad \Longleftrightarrow$

$x \in (A \div B) \div C.$

Poznámka: pro základní množinové operace, tj. $\cup$, $\cap$, $-$, $\div$, $\times$ platí četná početní pravidla (předchozí příklad je ukázkou jednoho z nich). Známe-li tato pravidla, pak je můžeme mnohdy též použít k důkazu rovnosti dvou množin. Není tedy důkaz pomocí množinových inkluzí jedinou možnou metodou, jak dokázat rovnost dvou množin.

Například, víme-li, že pro libovolné množiny A, B, C platí (viz Věta 2.1., kapitoly I z přednášky):

$$\begin{gathered} A \cap B = B \cap A \quad , \quad A \cup B = B \cup A \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad , \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad , \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{gathered}$$

pak můžeme pomocí těchto "početních pravidel" lehce spočítat následující příklad.

PŘÍKLAD 4. Nechť A, B, C jsou libovolné množiny; dokažte, že platí:

$$(A \cup B) \,\cap\, (A \cup C) \,\cap\, (B \cup C) \;=\; (A \cap B) \,\cup\, (A \cap C) \,\cup\, (B \cap C)\,.$$

Řešení: užitím vztahů uvedených v předchozí poznámce dostáváme:

$$(A \cup B) \,\cap\, (A \cup C) \,\cap\, (B \cup C) \;=\; (A \,\cup\, (B \cap C)) \,\cap\, (B \cup C) \;=$$

$$(A \cap (B \cup C)) \,\cup\, ((B \cap C) \cap (B \cup C)) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

čímž je uvedený vztah dokázán. Poznamenejme snad ještě, že v posledním kroku jsme kromě již zmíněných vztahů též použili zřejmou rovnost: $(B \cap C) \,\cap\, (B \cup C) = B \cap C$.

PŘÍKLAD 5. Nechť ϱ_i je relace mezi množinami A, B pro každé $i \in I$ (kde I je daná neprázdná indexová množina) a nechť σ je relace mezi množinami B a C. Dokažte, že platí:

$$\sigma \circ \bigcup_{i \in I} \varrho_i \;= \bigcup_{i \in I} (\sigma \circ \varrho_i)\,.$$

Řešení: na levé i pravé straně dokazované rovnosti jsou relace mezi množinami A a C, tzn. jisté podmnožiny kartézského součinu $A \times C$. Dokazovaná rovnost je tedy rovností mezi dvěma množinami a budeme ji dokazovat tak, že ověříme platnost obou množinových inkluzí:

"$\subseteq$": $(x,y) \in \sigma \circ \bigcup\limits_{i\in I} \varrho_i \implies$ (podle definice složené relace) existuje $b \in B$ takové, že $(x,b) \in \bigcup\limits_{i\in I} \varrho_i \;\wedge\; (b,y) \in \sigma$. Potom (podle definice množinového sjednocení) existuje index $k \in I$ tak, že $(x,b) \in \varrho_k$, tzn. $(x,y) \in \sigma \circ \varrho_k$, neboli $(x,y) \in \bigcup\limits_{i\in I} (\sigma \circ \varrho_i)$.

"$\supseteq$": $(x,y) \in \bigcup\limits_{i\in I} (\sigma \circ \varrho_i) \implies$ (podle definice množinového sjednocení) existuje index $k \in I$ tak, že $(x,y) \in \sigma \circ \varrho_k \implies$ (podle definice složené relace) existuje prvek $b \in B$ takový, že $(x,b) \in \varrho_k \;\wedge$ $(b,y) \in \sigma \implies (x,b) \in \bigcup\limits_{i\in I} \varrho_i \;\wedge\; (b,y) \in \sigma \implies (x,y) \in \sigma \circ \bigcup\limits_{i\in I} \varrho_i$.

PŘÍKLAD 6. Nalezněte všechny páté odmocniny z komplexního čísla

$$c = \frac{2i \cdot (\sqrt{3}-i)^{10}}{(1+i\sqrt{3})^8 \cdot (-1+i)^6}$$

Řešení. Hledané řešení označíme z. Spočítáme zvlášť jeho absolutní hodnotu a zvlášť jeho argument (s využitím početních pravidel, která platí pro počítání s komplexními čísly).

1. výpočet absolutní hodnoty z:

$$|\,z\,| = \sqrt[5]{\frac{|\,2i\,| \cdot |\,\sqrt{3}-i\,|^{10}}{|\,1+i\sqrt{3}\,|^{8} \cdot |\,-1+i\,|^{6}}} = \sqrt[5]{\frac{2 \cdot 2^{10}}{2^8 \cdot (\sqrt{2})^6}} = 1$$

2. výpočet argumentu z:

$$\arg z = \tfrac{1}{5}\left(\arg(2i)+10\arg(\sqrt{3}-i)-8\arg(1+i\sqrt{3})-6\arg(-1+i)+k\cdot 2\pi\right) =$$
$$= \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{\pi}{2} + 10\cdot\tfrac{11}{6}\pi - 8\cdot\tfrac{\pi}{3} - 6\cdot\tfrac{3}{4}\pi + k\cdot 2\pi\right) = \tfrac{7}{3}\pi + k\cdot\tfrac{2}{5}\pi\,.$$

Hledanými pátými odmocninami z čísla c je pak následujících pět komplexních čísel (místo argumentu $\frac{7}{3}\pi$ můžeme použít jakoukoliv hodnotu lišící se od tohoto argumentu o libovolný celočíselný násobek 2π, tedy například hodnotu $\frac{7}{3}\pi - 2\pi = \frac{\pi}{3}$ z intervalu $\langle 0, 2\pi)$):

$$z_k = \cos\left(\tfrac{\pi}{3} + k\cdot\tfrac{2}{5}\pi\right) + i\,\sin\left(\tfrac{\pi}{3} + k\cdot\tfrac{2}{5}\pi\right) \qquad \text{pro } k = 0,1,2,3,4\,.$$

Poznámka: pro řešení celé řady úloh o velkých celých číslech je možno s výhodou použít počítání s kongruencemi. Přitom využíváme početní pravidla, která pro kongruence platí. Můžeme tedy zejména:

- číslo na jedné straně kongruence nahradit libovolným číslem s ním kongruentním podle daného modulu (obvykle nejmenším kladným nebo takovým, které má nejmenší absolutní hodnotu)
- obě strany kongruence vynásobit stejným číslem
- obě strany kongruence umocnit na stejné přirozené číslo
- dvě kongruence se stejným modulem navzájem sečítat, resp. odečítat, resp. násobit.

PŘÍKLAD 7. Nalezněte zbytek po dělení čísla 7^{777} číslem 13.

Řešení: hledáme číslo od 0 do 12, které je kongruentní s číslem 7^{777} podle modulu 13.

Je $7^2 = 49$, přičemž 49 je podle modulu 13 kongruentní s číslem -3. Můžeme tedy psát

$$7^2 \equiv -3 \pmod{13}.$$

Umocníme-li obě strany této kongruence na třetí, dostaneme

$$7^6 \equiv -27 \pmod{13}.$$

Číslo -27 je však podle modulu 13 kongruentní s -1. Dostáváme tak

$$7^6 \equiv -1 \pmod{13}.$$

Nyní umocníme obě strany poslední kongruence na 129 a dostaneme

$$7^{774} \equiv -1 \pmod{13}. \qquad (*)$$

Je vidět, že teď ještě potřebujeme vyjádřit číslo 7^3 pomocí kongruence modulo 13. Ve výše uvedené kongruenci $7^2 \equiv -3 \pmod{13}$ vynásobíme obě strany číslem 7 a dostaneme, že $7^3 \equiv -21 \pmod{13}$, což lze přepsat do tvaru

$$7^3 \equiv 5 \pmod{13}. \qquad (**)$$

Po vynásobení levých a pravých stran kongruencí $(*)$ a $(**)$ dostáváme, že $7^{777} \equiv -5 \pmod{13}$, odkud již bezprostředně plyne, že je

$$7^{777} \equiv 8 \pmod{13}.$$

Tedy hledaným zbytkem po dělení čísla 7^{777} číslem 13 je číslo 8.

PŘÍKLAD 8. Dokažte, že předpis f tvaru:

$$f(x) = 49x + 1 \quad , \qquad \text{pro každé } x \in (0, 2)$$

definuje zobrazení intervalu $(0, 2)$ do intervalu $(1, 100)$ a rozhodněte, zda toto zobrazení f je injektivní, resp. surjektivní.

Řešení:

a) abychom dokázali, že předpis f definuje zobrazení $(0, 2) \to (1, 100)$, musíme ukázat, že pro libovolné $x \in (0, 2)$ platí, že $f(x) \in (1, 100)$.
Nechť tedy x je reálné číslo: $0 < x < 2$. Pak po vynásobení číslem 49 a přičtení 1 dostáváme:

$$49 \cdot 0 + 1 < 49 \cdot x + 1 < 49 \cdot 2 + 1 < 100,$$

neboli: $1 < f(x) < 100$.

b) budeme dokazovat, že zobrazení f je injektivní.
Nechť $x, y \in (0, 2)$ takové, že $f(x) = f(y)$. Potom $49x + 1 = 49y + 1$, odkud plyne, že $x = y$. Tím jsme dokázali, že zobrazení f je injektivní.

c) z úvahy provedené v a) je vidět, že pro $0 < x < 2$ dostáváme: $1 < f(x) < 99$, a tedy např. reálné číslo $99 \in (1, 100)$, přičemž toto číslo 99 nemá při zobrazení f žádný vzor. Tedy vidíme, že dané zobrazení f není surjektivní.

PŘÍKLAD 9. Zobrazení $f : 2^{\mathbf{N}} \to \mathbf{N}$ je definované takto: pro každé $A \in 2^{\mathbf{N}}$ je

$$f(A) = \begin{cases} 1 & \text{je-li množina } A \text{ konečná} \\ a_0 + 1 & \text{kde } a_0 \text{ je nejmenší číslo z } A, \text{ je-li } A \text{ nekonečná}. \end{cases}$$

Rozhodněte, zda zobrazení f je injektivní, resp. surjektivní.

Řešení:

a) zobrazení f není injektivní, neboť například pro prvky $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ z množiny $2^{\mathbf{N}}$ platí: $A \neq B$ a $f(A) = f(B)$.

b) zobrazení f je surjektivní, neboť pro libovolné číslo $u \in \mathbf{N}$ platí:
- je-li $u = 1$, pak jeho vzorem při zobrazení f je např. množina $\{1, 2\}$
- je-li $u \neq 1$, pak jeho vzorem při zobrazení f je např. množina A tvaru

$$A = \{u{-}1\,,\, u\,,\, u{+}1\,,\, u + 2\,,\, \dots\}.$$

PŘÍKLAD 10. Nechť na množině M je dána relace ϱ, která je reflexivní a tranzitivní.
Dokažte, že pak relace $\varrho \cap \varrho^{-1}$ je relací ekvivalence na množině M.

Řešení: musíme dokázat, že relace $\varrho \cap \varrho^{-1}$ je:

a) reflexivní:
nechť $x \in M$ je libovolný prvek. Ale relace ϱ je podle předpokladu reflexivní, tzn. platí $x\varrho x$, odkud dále podle definice inverzní relace dostáváme, že $x\varrho^{-1}x$. Dohromady je tak: $x\,(\varrho \cap \varrho^{-1})\,x$ a tedy relace $\varrho \cap \varrho^{-1}$ je reflexivní.

b) symetrická:
nechť $x\,(\varrho \cap \varrho^{-1})\,y$. Pak $x\varrho y \ \wedge\ x\varrho^{-1}y$, odkud podle definice inverzní relace dostáváme: $y\varrho^{-1}x \ \wedge\ y\varrho x$. Tedy: $y\,(\varrho \cap \varrho^{-1})\,x$ a relace $\varrho \cap \varrho^{-1}$ je symetrická.

c) tranzitivní:
nechť $x\,(\varrho \cap \varrho^{-1})\,y \ \wedge\ y\,(\varrho \cap \varrho^{-1})\,z$. Pak $x\varrho y \ \wedge\ x\varrho^{-1}y \ \wedge\ y\varrho z \ \wedge\ y\varrho^{-1}z$. Přepsáním a užitím definice inverzní relace dostáváme: $x\varrho y \ \wedge\ y\varrho z$, resp. $z\varrho y \ \wedge\ y\varrho x$, odkud podle předpokladu o tranzitivitě relace ϱ je: $x\varrho z \ \wedge\ z\varrho x$, neboli $x\varrho z \ \wedge\ x\varrho^{-1}z$. Dohromady pak: $x\,(\varrho \cap \varrho^{-1})\,z$ a relace $\varrho \cap \varrho^{-1}$ je tedy tranzitivní.

PŘÍKLAD 11. Na množině $\mathbf{C}$ všech komplexních čísel je definována relace ϱ takto: pro $a + bi$, $c + di \in \mathbf{C}$ je

$$(a + bi)\,\varrho\,(c + di) \iff (a < c) \ \vee\ (a = c \ \wedge\ b \leq d).$$

Dokažte, že ϱ je relací lineárního uspořádání na $\mathbf{C}$.

Řešení: dokazujeme, že relace ϱ je:

a) reflexivní:
nechť $(a + bi) \in \mathbf{C}$ libovolné. Pak podle definice relace ϱ je zřejmě $(a + bi)\,\varrho\,(a + bi)$.

b) antisymetrická:
nechť $(a + bi)\,\varrho\,(c + di) \wedge (c + di)\,\varrho\,(a + bi)$. Pak podle definice relace ϱ musí být $a = c \wedge b \leq d \wedge d \leq b$, odkud dostáváme, že $(a+bi) = (c+di)$.

c) tranzitivní:
nechť $(a + bi)\,\varrho\,(c + di) \ \wedge\ (c + di)\,\varrho\,(e + fi)$. Pak:

$$((a < c) \ \vee\ (a = c \ \wedge\ b \leq d)) \ \wedge\ ((c < e) \ \vee\ (c = e \ \wedge\ d \leq f))$$

odkud rozborem všech možností vychází, že $(a + bi)\,\varrho\,(e + fi)$.

d) úplná:
nechť $(a+bi),(c+di)\in \mathbf{C}$ libovolné. Pak je zřejmě buď $a<c$ nebo $c<a$ nebo $a=c$, resp. kromě toho je $b\le d$ nebo $d\le b$. Rozborem všech možností vychází, že $(a+bi)\,\varrho\,(c+di)$ nebo $(c+di)\,\varrho\,(a+bi)$. Dohromady tak dostáváme, že ϱ je relací lineárního uspořádání na množině všech komplexních čísel $\mathbf{C}$.

Poznámka: v předchozím příkladu se nám podařilo množinu $\mathbf{C}$ všech komplexních čísel lineárně uspořádat. Její hasseovský diagram si můžeme schematicky představit tak, že vezmeme ty přímky v rovině, které jsou rovnoběžné se souřadnou osou y a všechny tyto přímky postupně směrem odleva doprava “poskládáme” nad sebe.

Je ale důležité si uvědomit, že toto lineární uspořádání množiny $\mathbf{C}$ nemá všechny vlastnosti, na které jsme zvyklí u obvyklého uspořádání čísel podle velikosti na množinách $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ nebo $\mathbf{R}$. Například známá vlastnost:

$$a\le b \;\wedge\; 0<c \quad\Longrightarrow\quad a\cdot c\le b\cdot c$$

pro výše definované uspořádání ϱ na $\mathbf{C}$ neplatí (uveďte protipříklad).

PŘÍKLAD 12. Nechť A je libovolná pevná množina. Dokažte, že potom $(2^A,\div)$ je komutativní grupa.

Řešení: připomeňme, že symbol $\div$ označuje symetrickou diferenci, definovanou vztahem

$$X\div Y=(X-Y)\cup(Y-X) \qquad \text{pro } X,Y\in 2^A.$$

Pro libovolné A je množina 2^A neprázdná a dále je zřejmé, že symetrická diference $\div$ je operací na množině 2^A, přičemž tato operace je komutativní. Tedy $(2^A,\div)$ je komutativní grupoid.

Podle Příkladu 3 je operace $\div$ též asociativní a dostáváme tak, že $(2^A,\div)$ je komutativní pologrupa.

Dále ukážeme, že pologrupa $(2^A,\div)$ má neutrální prvek $\emptyset$. Nechť tedy $X\in 2^A$ libovolné; potom platí: $X\div\emptyset=(X-\emptyset)\cup(\emptyset-X)=X$.

Nakonec ukážeme, že ke každému prvku $X\in 2^A$ existuje prvek inverzní, jímž je v tomto případě opět prvek X. Podle definice $\div$ však platí: $X\div X=(X-X)\cup(X-X)=\emptyset$.

Dohromady jsme tedy dokázali, že $(2^A,\div)$ je komutativní grupa.

PŘÍKLAD 13. Nechť $(G,\cdot)$ je pologrupa. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) $(G,\cdot)$ je grupa

(ii) existuje prvek $e\in G$ tak, že pro každé $a\in G$ platí $e\cdot a=a$ $\wedge$ ke každému prvku $a\in G$ existuje $x\in G$ tak, že $x\cdot a=e$.

Řešení:

“(i) $\Longrightarrow$ (ii)”: tato implikace zřejmě platí, neboť za prvek e vezmeme jedničku grupy $(G,\cdot)$ a za prvek x vezmeme prvek a^{-1}.

“(ii) $\Longrightarrow$ (i)”: nechť $a\in G$ je libovolný prvek. Pak podle (ii) existuje prvek $x\in G$ a existuje prvek $y\in G$ tak, že platí:

$$x\cdot a=e \qquad\text{a}\qquad y\cdot x=e.$$

Nyní nejprve dokážeme, že prvek e je neutrálním prvkem pologrupy $(G,\cdot)$. Ale podle (ii) je: $e\cdot a=a$ a dále platí:

$$a\cdot e=e\cdot(a\cdot e)=(y\cdot x)\cdot(a\cdot e)=y\cdot(x\cdot a)\cdot e=y\cdot(e\cdot e)=y\cdot e=$$
$$=y\cdot(x\cdot a)=(y\cdot x)\cdot a=e\cdot a=a.$$

Nakonec dokážeme, že prvek x je inverzním prvkem k prvku a. Ale podle (ii) je: $x\cdot a=e$ a dále platí:

$$a\cdot x=e\cdot(a\cdot x)=(y\cdot x)\cdot(a\cdot x)=y\cdot(x\cdot a)\cdot x=y\cdot(e\cdot x)=y\cdot x=e.$$

Dokázali jsme tak, že $(G,\cdot)$ je grupa, tzn. platí (i).

Poznámka: předchozí příklad je velmi užitečný pro praktické výpočty, neboť nám ukazuje, že při zjišťování toho, zda je daná pologrupa grupou, stačí (bez ohledu na komutativnost či nekomutativnost operace) ověřovat pouze “polovinu” definice neutrálního prvku a pro každý prvek odpovídající “polovinu” definice inverzního prvku k němu. Jinak řečeno: k tomu, abychom dokázali, že daná pologrupa je grupou stačí dokázat, že tato pologrupa má ”levou jedničku” a každý její prvek má ”levou inverzi”.
Dá se očekávat, že k předchozímu tvrzení bude platit tvrzení analogické, v němž se použije ”druhá polovina” definice neutrálního prvku a pro každý prvek ”druhá polovina” definice inverzního prvku k němu, tzn. bude platit, že daná pologrupa je grupou právě tehdy, když v ní existuje ”pravá jednička” a ke každému jejímu prvku existuje ”pravá inverze”. Dokažte si sami, že tomu tak skutečně je.

PŘÍKLAD 14. Na množině $G = \{a, b, c, d\}$ je dána operace $\cdot$ tabulkou:

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	c	b	c	a
c	b	c	b	a
d	a	b	b	d

Nalezněte všechny podgrupoidy, resp. všechny podpologrupy, resp. všechny podgrupy zadaného grupoidu $(G, \cdot)$.

Řešení:

1. nalezení všech podgrupoidů grupoidu $(G, \cdot)$.
   Uvažujeme postupně všechny neprázdné podmnožiny množiny G (kterých je celkem 15) a vyšetřujeme, zda jsou uzavřeny vzhledem k operaci $\cdot$. Po jednoduchém výpočtu pomocí tabulky operace uvedené v zadání dostáváme celkem 6 podgrupoidů $(H_i, \cdot)$, $1 \le i \le 6$, grupoidu $(G, \cdot)$, přičemž

$$H_1 = \{a\}, \quad H_2 = \{b\}, \quad H_3 = \{a, d\},$$
$$H_4 = \{b, c\}, \quad H_5 = \{a, b, c\}, \quad H_6 = G.$$

2. nalezení všech podpologrup grupoidu $(G, \cdot)$.
   Ověřujeme, zda v nalezených podgrupoidech platí asociativní zákon. Vyjde, že:
   – v $(H_1, \cdot)$, $(H_2, \cdot)$, $(H_3, \cdot)$ a $(H_4, \cdot)$ asociativní zákon platí (u prvých dvou podgrupoidů je to zřejmé a u zbývajících dvou se asociativní zákon lehce ověří pomocí tabulky operace).
   – v $(H_5, \cdot)$ a $(H_6, \cdot)$ asociativní zákon neplatí, neboť např.

$$a \cdot (a \cdot b) = b, \text{ ale } (a \cdot a) \cdot b = c.$$

   Dostáváme tak celkem 4 podpologrupy grupoidu $(G, \cdot)$, a to:

$$(H_1, \cdot), \ (H_2, \cdot), \ (H_3, \cdot), \ (H_4, \cdot).$$

3. nalezení všech podgrup grupoidu $(G, \cdot)$.
   Vyšetřujeme, které z podpologrup jsou podgrupami. Zřejmě $(H_3, \cdot)$ podgrupou není (neexistuje v ní neutrální prvek), kdežto ostatní podgrupami jsou, což je opět vidět z tabulky operace. Dostáváme tak celkem 3 podgrupy grupoidu $(G, \cdot)$, a to:

$$(H_1, \cdot), \ (H_2, \cdot), \ (H_4, \cdot)$$

PŘÍKLAD 15. Nechť A je libovolná neprázdná množina. Uvažme množinu 2^A s operacemi symetrické diference $\div$ a množinového průniku $\cap$. Potom:

a) dokažte, že $(2^A, \div, \cap)$ je komutativní okruh

b) rozhodněte, pro jaké A je tento okruh oborem integrity.

Řešení:

a) pro množinu 2^A s operacemi $\div$ a $\cap$ ověříme definici komutativního okruhu:

1. platí, že $(2^A, \div)$ je komutativní grupa (viz Příklad 12); připomeňme, že roli nuly zde hraje prázdná množina $\emptyset$.
2. platí, že $(2^A, \cap)$ je komutativní pologrupa (plyne ihned ze známých vlastností množinového průniku). Dále je zřejmé, že jedničkou této pologrupy je množina A.
3. dokážeme, že platí distributivní zákony (vzhledem ke komutativitě operace $\cap$ stačí ověřovat platnost pouze jednoho z nich). Při důkazu využijeme fakt (viz cvičení [1.2.B2] a), resp. [1.2.B1] f)), že pro libovolné množiny K, L, M platí:

$$K \cap (L \cup M) = (K \cap L) \cup (K \cap M)$$
$$K \cap (L - M) = (K \cap L) - (K \cap M)$$

   Nechť tedy $X, Y, Z \in 2^A$; pak platí:

$$\begin{aligned} X \cap (Y \div Z) &= X \cap ((Y - Z) \cup (Z - Y)) = \\ &= (X \cap (Y - Z)) \cup (X \cap (Z - Y)) = \\ &= ((X \cap Y) - (X \cap Z)) \cup ((X \cap Z) - (X \cap Y)) = \\ &= (X \cap Y) \div (X \cap Z). \end{aligned}$$

Dohromady jsme tak ukázali, že $(2^A, \div, \cap)$ je komutativní okruh.

b) podle předpokladu je A je neprázdná množina, tzn. užitím již dokázané části a) dostáváme, že $(2^A, \div, \cap)$ je netriviální komutativní okruh. Bude tedy oborem integrity právě když neobsahuje dělitele nuly. Ale

– je-li množina A jednoprvková, pak pro $X, Y \in 2^A$ a $X \cap Y = \emptyset$ musí být $X = \emptyset$ nebo $Y = \emptyset$ a tedy $(2^A, \div, \cap)$ je oborem integrity
– je-li množina A alespoň dvouprvková, pak v ní jistě existují dva různé prvky x, y, přičemž pak zřejmě $\{x\}, \{y\} \in 2^A$ jsou dělitelé nuly v okruhu $(2^A, \div, \cap)$ a tedy $(2^A, \div, \cap)$ není oborem integrity.

Dohromady tak dostáváme, že okruh $(2^A, \div, \cap)$ je oborem integrity právě tehdy když množina A je jednoprvková.

II. CVIČENÍ

Druhá část učebního textu obsahuje neřešené úlohy a příklady k procvičování a samostatnému studiu. Rozdělení příkladů do kapitol a paragrafů odpovídá členění látky provedenému v učebním textu k přednášce ze Základů matematiky. V rámci jednotlivých paragrafů jsou pak příklady řazeny tak, aby toto řazení pokud možno odpovídalo způsobu, jakým jsou studované pojmy postupně budovány. Příklady jsou vybrány tak, že procvičují především pojmy a fakta uváděná na přednášce. Úlohy, které látku z přednášky dále rozšiřují, se vyskytují pouze výjimečně.

Příklady jsou v jednotlivých paragrafech obvykle rozděleny na dvě části, a to na:

– **příklady "testového charakteru"**
  (označené kromě čísla ještě písmenem A), což jsou krátké úlohy, které by měl čtenář vždy prakticky okamžitě umět vyřešit a které hlavně procvičují správné a úplné pochopení základních pojmů a tvrzení. Tyto úlohy jsou početně i časově nenáročné a každý by je měl projít a vyřešit úplně všechny. Zkratka "U.p." zde znamená "Udejte příklad".

  Ve výsledcích k této části jsou uváděny pouze negativní odpovědi (tzn. je konstatováno, že hledaný příklad neexistuje a někdy je i uveden důvod proč tomu tak je). Není-li u těchto příkladů ve výsledcích odpověď uvedena, znamená to, že příklad požadovaný v zadání lze sestrojit.

– **příklady "algoritmického charakteru"**
  (označené kromě čísla ještě písmenem B), což jsou běžné standardní úlohy, v nichž je nutné vždy něco spočítat, případně něco dokázat. Důkazové úlohy, které jsou zde uvedeny, procvičují látku probíranou na přednášce ze Základů matematiky. Ke všem těmto příkladům jsou (tam, kde to dává smysl) v poslední kapitole vždy uvedeny výsledky a u značné části z nich (zejména u důkazových úloh) též stručný návod k řešení. U obtížnějších úloh je návod k jejich řešení často uveden již hned za zadáním příkladu.

Výsledky cvičení a návody k jejich řešení
jsou uvedeny ve třetí části tohoto textu. Měly by sloužit pouze ke kontrole zejména numerických výpočtů, resp. jako návod v situaci, kdy byly opravdu vyčerpány všechny pokusy o samostatné řešení daného problému. Jsou-li ve výsledcích či návodech uvedeny odkazy na tvrzení a věty, pak se vždy jedná o tvrzení a věty z učebního textu k přednášce ze Základů matematiky.

Literatura
uvedená na konci textu obsahuje jednak sbírky příkladů, které doplňují a rozšiřují látku procvičovanou v tomto textu a dále pak závěrečné práce studentů matematiky Přírodovědecké fakulty MU, které se zabývají stejnou nebo příbuznou problematikou. Kromě jednoho titulu (sbírka příkladů [1], což jsou skripta, která byla používána pro cvičení ze Základů matematiky do roku 2012), jsou všechny ostatní uvedené texty volně dostupné na webu (stav v srpnu 2013).

Zvláštní pozornost si zaslouží především bakalářská práce [4] s názvem *Základy matematiky, sbírka příkladů*, ve které jsou vyřešeny a okomentovány téměř všechny A – čkové příklady z tohoto textu. Číslování příkladů v ní sice zčásti neodpovídá číslování příkladů použitému v tomto textu (bakalářská práce byla vypracována pro potřeby sbírky [1]), ale podle názvů kapitol a formulace zadání jednotlivých příkladů je možné každý příklad z tohoto textu, který je v ní uveden, bez problému dohledat.

KAPITOLA 1:

OPAKOVÁNÍ A DOPLNĚNÍ STŘEDOŠKOLSKÉ LÁTKY

§ 1: ZÁKLADNÍ LOGICKÉ POJMY

[1.1.A1]. U.p. výroků A, B tak, aby disjunkce $A \vee B$ byl pravdivý výrok a konjunkce $A \wedge B$ byl nepravdivý výrok.

[1.1.A2]. U.p. výroků A, B tak, aby disjunkce $A \vee B$ byl pravdivý výrok a konjunkce $\neg A \wedge \neg B$ byl nepravdivý výrok.

[1.1.A3]. U.p. výroků A, B tak, aby implikace $A \Rightarrow B$ byl pravdivý výrok a implikace $B \Rightarrow A$ byl nepravdivý výrok.

[1.1.A4]. U.p. výroků A, B tak, aby implikace $A \Rightarrow B$ byl pravdivý výrok a implikace $\neg B \Rightarrow \neg A$ byl nepravdivý výrok.

[1.1.A5]. U.p. výroků A, B tak, aby obě implikace $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$ byly pravdivými výroky.

[1.1.A6]. U.p. výroků A, B tak, aby obě implikace $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$ byly nepravdivými výroky.

[1.1.A7]. U.p. výroků A, B tak, aby implikace $A \Rightarrow B$ byl nepravdivý výrok a ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ byl pravdivý výrok.

[1.1.A8]. U.p. výrokové funkce, jejíž definiční obor je roven oboru pravdivosti.

[1.1.A9]. U.p. výrokové funkce, jejímž oborem pravdivosti je prázdná množina.

[1.1.A10]. Udejte podmínku, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná
pro to, aby implikace $A \Rightarrow B$ byla nepravdivým výrokem.

♣ ♣ ♣

[1.1.B1]. Rozhodněte, která z uvedených sdělení jsou výroky. U výroku pak určete jeho pravdivostní hodnotu:

a) "Kolik je hodin?"

b) "Číslo $2^{10} + 1$ je prvočíslo."

c) "Číslo x je sudé číslo."

d) "Odbočení vpravo je zakázáno!"

[1.1.B2]. Nechť symboly A, B, C značí tyto výroky:

A: "Číslo $2^{10} + 1$ je dělitelné třemi"

B: "Číslo $2^{10} + 1$ je dělitelné pěti"

C: "Číslo $2^{10} + 1$ je dělitelné sedmi".

Potom pomocí symbolů A, B, C a logických spojek zapište následující výroky:

a) "Je-li $2^{10} + 1$ dělitelné 3, pak není dělitelné 7."

b) "Není-li $2^{10} + 1$ dělitelné 3 a je dělitelné 5, pak je dělitelné 7."

c) "Není-li $2^{10} + 1$ dělitelné 5, pak není dělitelné 3 nebo 7."

d) "$2^{10} + 1$ je dělitelné 5 právě když není dělitelné 3 ani 7."

[1.1.B3]. Rozhodněte o pravdivosti výroků A, B, C z předchozího příkladu a dále o pravdivosti složených výroků z a), b), c), d) předchozího příkladu.

[1.1.B4]. Dokažte, že výroky $\neg(A \Rightarrow B)$ a $(A \wedge \neg B)$ jsou ekvivalentní.

[1.1.B5]. Logická spojka $|$, definovaná tabulkou pravdivostních hodnot:

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \mid B)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

se nazývá *Shefferův symbol*.

Dá se dokázat, že pouze pomocí Shefferova symbolu lze vyjádřit každou z logických spojek $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

Rozhodněte, která z výše uvedených logických spojek je vyjádřena vztahem:

a) $A \mid (A \mid B)$

b) $(A \mid B) \mid (A \mid B)$.

[1.1.B6]. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků a implikaci v nich obsaženou nahraďte její obměnou.

a) Jestliže je trojúhelník rovnostranný, pak je rovnoramenný

b) Jestliže dvě přímky nejsou rovnoběžné, pak jsou navzájem kolmé.

[1.1.B7]. Výrok, jehož pravdivostní hodnota je vždy 1, nezávisle na tom, jaké jsou pravdivostní hodnoty výroků, z nichž je utvořen, se nazývá *tautologie*.

Dokažte, že následující výroky jsou tautologie :

a) $\neg(A \wedge (\neg A))$

b) $A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$

c) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge (\neg B))$

d) $A \Leftrightarrow (A \wedge (A \vee B))$.

[1.1.B8]. Určete obor pravdivosti následující výrokové formy, jejímž definičním oborem je množina $\mathbf{R}$ všech reálných čísel:

a) $|2x-1| < |3-x|$

b) $x - 6 \geq x \cdot (x-3)$

c) $x^2 - 5x + 6 > 3 - x$

d) $(x+2) \cdot (x-2) \geq 2x - 5$

[1.1.B9]. Utvořte negaci (bez použití obratu ”není pravda, že…”) výroku:

a) ”Napsal to Petr nebo Pavel.”

b) ”Dnes bude pršet a zítra nebude svítit slunce.”

c) ”Jestliže se budu učit, pak zkoušku z matematiky udělám.”

d) ”Budu-li mít volno, pak půjdu do kina nebo do divadla.”

[1.1.B10]. Utvořte negaci (bez použití obratu ”není pravda, že …”) výroku:

a) ”Žádná kulička ležící na tomto stole není modrá.”

b) ”Alespoň jedno celé číslo je sudé a žádné celé číslo není liché.”

c) ”Pro všechna kladná reálná čísla r, s platí, že $r < r \cdot s$.”

d) ”Existují celá čísla $t_1, \dots, t_n$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, tak, že $t_1 + \dots + t_n = 0$.”

e) ”Pro libovolná přirozená čísla $a_1, \dots, a_n$, kde $n \geq 5$ a alespoň jedno z těchto čísel je větší než 5 platí: $a_1 + \dots + a_n \geq 10$.”

f) ”Existují komplexní čísla z_1, z_2, z_3, která jsou všechna ryze imaginární tak, že jejich součin $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$ je číslo reálné.”

[1.1.B11]. Následující tvrzení dokažte jednak matematickou indukcí a jednak bez použití matematické indukce:

a) pro každé přirozené číslo n platí: $1 + 2 + \dots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$

b) pro každé přirozené číslo n platí: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

[1.1.B12]. Matematickou indukcí dokažte, že

a) pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí : $6 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$

b) pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí : $2^{n-1} \leq n!$

c) pro každé celé číslo $n \geq 3$ platí : $2^n > 2n + 1$

d) pro každé celé číslo $n \geq 4$ platí : $3^n > n^3$

e) pro každé celé číslo $n \geq 5$ platí : $2^n > n^2$

[1.1.B13]. Nechť n značí libovolné přirozené číslo. Uvažme tvrzení:

$$\text{”} \; 2 + 4 + \dots + 2n = (n+2)(n-1) \; \text{”}.$$

Pak ukažte, že

a) uvedené tvrzení neplatí pro žádné přirozené n

b) uvedené tvrzení lze ”dokázat” matematickou indukcí, vynecháme-li v ní 1. krok (tzn. vidíme, že 1. krok nelze při důkazu matematickou indukcí vypustit).

[1.1.B14]. Posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, a_3, \dots$ je definována rekurentně takto:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 5; \qquad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \qquad \text{pro} \quad n \geq 3.$$

Matematickou indukcí dokažte, že pro $\forall\, n \in \mathbf{N}$ platí : $a_n = 2^n + 1$.

[1.1.B15]. Posloupnost přirozených čísel $u_1, u_2, u_3, \dots$ je definována rekurentně takto:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1; \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \qquad \text{pro} \quad n \geq 1$$

(tato posloupnost se nazývá *Fibonacciho posloupnost* a její členy se nazývají *Fibonacciho čísla*).

Dokažte, že platí:

$$u_{n+s} = u_{n-1} \cdot u_s + u_n \cdot u_{s+1} \qquad \text{pro } \forall\, n \geq 2 \text{ celé}, \ \forall\, s \in \mathbf{N}.$$

Návod: důkaz veďte matematickou indukcí vzhledem k s.

§ 2 : ZÁKLADNÍ MNOŽINOVÉ POJMY

[1.2.A1]. U.p. konečné množiny M, jejímiž prvky jsou nekonečné množiny.

[1.2.A2]. U.p. nekonečné množiny M, jejímiž prvky jsou konečné množiny.

[1.2.A3]. U.p. množin A, B tak, aby množina $A \times 2^B$ měla 18 prvků.

[1.2.A4]. U.p. množin A, B, C takových, že $A \cap B \subseteq A \cap C$ a $B \not\subseteq C$.

[1.2.A5]. U.p. nekonečné množiny A a konečné množiny B tak, že je $A - B = \emptyset$.

[1.2.A6]. U.p. dvou různých množin A, B tak, že $A - B \subseteq B - A$.

[1.2.A7]. U.p. množiny A, která má právě 3 podmnožiny.

[1.2.A8]. U.p. množin A, B tak, aby množina $A \times B$ měla právě 32 podmnožin.

[1.2.A9]. Nechť $A = \{0, 1, 2\}$. Přečtěte nahlas následující výroky a rozhodněte, které z nich jsou pravdivé a které nepravdivé:

a) $0 \in A$ b) $\{0\} \in A$ c) $0 \subseteq A$ d) $\{0\} \subseteq A$ e) $\emptyset \in A$ f) $\emptyset \subseteq A$

g) $\{\emptyset\} \in A$ h) $\{\emptyset\} \subseteq A$ i) $\{2\} \in \{2, \{2\}\}$ j) $\{2\} \subseteq \{2, \{2\}\}$.

[1.2.A10]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná

pro to, aby množiny A, B byly různé.

♣ ♣ ♣

[1.2.B1]. Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C platí:

a) $A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$

b) $A \cap B = A - (A - B)$

c) $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$

d) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

e) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

f) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) - C$

[1.2.B2]. Nechť I je neprázdná indexová množina a nechť A, B_i jsou množiny, pro každé $i \in I$. Dokažte, že platí:

a) $A \cap \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$

b) $A \cup \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$

c) $A - \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A - B_i)$

d) $A \times \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \times B_i)$.

[1.2.B3]. Nechť A_n, B_n $(n \in \mathbf{N})$ jsou množiny, splňující podmínky:

$(*)$ $A_n \supseteq A_{n+1}$, $B_n \supseteq B_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$

Potom:

a) dokažte, že: $\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$

b) ukažte, že předchozí rovnost neplatí, vynecháme-li předpoklad $(*)$.

[1.2.B4]. Nechť I značí množinu všech prvočísel. Pro každé prvočíslo $p \in I$ označme

$$A_p = \{\, k \cdot p \mid \text{pro každé } k \in \mathbf{N}\} = \{\, p,\ 2p,\ 3p,\ 4p,\ \ldots\,\}.$$

Dokažte, že pak platí:

a) $\bigcup_{p \in I} A_p = \mathbf{N} - \{1\}$

b) $\bigcap_{p \in I} A_p = \emptyset$

c) je-li $J \neq \emptyset$ libovolná konečná množina prvočísel, pak $\bigcap_{p \in J} A_p \neq \emptyset$.

[1.2.B5]. Dokažte, že pro intervaly na reálné ose platí:

a) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n} , 2 + \frac{1}{n}) = \langle 1 , 2 \rangle$

b) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{n}{n+1} , 2 + \frac{n}{n+1}) = (\frac{1}{2} , \frac{5}{2})$

c) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n} , 2 + \frac{1}{n}) = (0 , 3)$

d) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{n}{n+1} , 2 + \frac{n}{n+1}) = (0 , 3)$.

Definice. Nechť A, B jsou množiny. Pak množina

$$(A - B) \cup (B - A)$$

se nazývá *symetrická diference množin* A, B a označuje se $A \div B$.

Vidíme tedy, že $A \div B$ je množina všech takových prvků, které patří právě do jedné z množin A, B (nakreslete si obrázek !).

[1.2.B6]. Nechť A, B, C jsou množiny. Dokažte, že platí:

a) $A \div B = (A \cup B) - (A \cap B)$

b) $A \div B = B \div A$

c) $A \cup B = A \div (B \div (A \cap B))$

d) $A - B = A \div (A \cap B)$

e) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$.

[1.2.B7]. Nechť A, B, C jsou množiny. Dokažte, že platí:

a) $A \div B = \emptyset \iff A = B$

b) $A \div C = B \div C \implies A = B$.

[1.2.B8]. Nechť A je konečná, n-prvková množina ($n \geq 0$). Dokažte, že množina 2^A má právě 2^n prvků.

[1.2.B9]. Nechť $A = \{a, b, c, d\}$; nalezněte všechny prvky X množiny 2^A, pro které platí:

a) $X \cap \{a, b, d\} = \{a, d\}$

b) $X \cup \{a, b, d\} = \{a, d\}$.

[1.2.B10]. Nechť A, B jsou množiny. Dokažte, že:

a) $2^A \cap 2^B = 2^{A \cap B}$

b) $2^A \cup 2^B \subseteq 2^{A \cup B}$

c) obecně neplatí rovnost $2^A \cup 2^B = 2^{A \cup B}$.

[1.2.B11]. Nechť $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 7\}$, $C = \mathbf{R}$. Popište množiny: $A \times B$, resp. $B \times A$, resp. $B \times B$, resp. $B \times 2^B$, resp. $B \times C$.

[1.2.B12]. Nechť A, B, C, D jsou množiny. Dokažte, že:

a) $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \implies A \times B \subseteq C \times D$

b) $A \subseteq B \implies A \times C \subseteq B \times C$

c) obecně neplatí implikace: $A \subset B \implies A \times C \subset B \times C$

[1.2.B13]. Nechť A, B, C jsou množiny. Dokažte, že platí:

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

c) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

[1.2.B14]. Nechť A, B, C, D jsou množiny. Dokažte, že platí:

a) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$

b) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D) = (A \times D) \cap (B \times C)$

c) $(A \times B) - (C \times D) = ((A - C) \times B) \cup (A \times (B - D))$

[1.2.B15]. Nechť A, B, C jsou množiny. Dokažte, že obecně neplatí:

a) $A - (B - C) = (A - B) - C$

b) $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$

c) $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$

§ 3 : ZÁKLADNÍ ČÍSELNÉ OBORY

[1.3.B1]. Daná racionální čísla vyjádřete v základním tvaru :

a) $\dfrac{180}{252}$ b) $-\dfrac{108}{144}$ c) $\dfrac{180}{135}$ d) $-\dfrac{264}{440}$.

[1.3.B2]. Dokažte, že pro $a, b, c \in \mathbf{Q}$ platí:

a) $a + b\sqrt{2} = 0 \iff a = 0 \ \wedge\ b = 0$

b) $a + b\sqrt[3]{2} = 0 \iff a = 0 \ \wedge\ b = 0$

c) $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0 \iff a = 0 \ \wedge\ b = 0 \ \wedge\ c = 0$

d) $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0 \iff a = 0 \ \wedge\ b = 0 \wedge\ c = 0.$

Návod: využijte toho, že $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$ nejsou racionální čísla.

[1.3.B3]. Ukažte, že ani jedno tvrzení z předchozího cvičení neplatí, jestliže místo $a, b, c \in \mathbf{Q}$ předpokládáme, že $a, b, c \in \mathbf{R}$.

[1.3.B4]. Vypočítejte a výsledek napište v algebraickém tvaru :

a) $\dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{\sqrt{5}+3i}{1+2i}$

b) $\left(\dfrac{1+2i}{1-2i}\right)^2 - \left(\dfrac{1-2i}{1+2i}\right)^2$.

[1.3.B5]. Popište a znázorněte náčrtkem množinu všech komplexních čísel z, pro která platí :

a) $|\, z + 2 - 3i \,| < 3$

b) $\overline{z} = -iz$

c) $|\, z - i \,| = |\, z + 2 \,|$

d) $\overline{z} = \dfrac{4}{z}$.

[1.3.B6]. V oboru komplexních čísel řešte rovnici :

a) $|\, z \,| - z = 1 + 2i$

b) $z^2 = z + \overline{z}$.

[1.3.B7]. V závislosti na parametru $p \in \mathbf{R}$ popište množinu všech komplexních čísel z, splňujících rovnici

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = p\,.$$

[1.3.B8]. Napište v goniometrickém tvaru komplexní číslo z, je-li :

a) $z = i - \sqrt{3}$

b) $z = 2 - 2\sqrt{3}\, i$

c) $z = -\sin\alpha + i\cdot\cos\alpha$

d) $z = \dfrac{\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha}{2\cos\beta + 2\,i\cdot\sin\beta}$.

[1.3.B9]. Užitím Moivreovy věty spočtěte komplexní číslo z a výsledek napište v algebraickém tvaru. Při tom :

a) $z = \left(\dfrac{i\cdot\sqrt{3} - 1}{2}\right)^{23}$

b) $z = \left(1 + \cos\dfrac{\pi}{3} + i\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^6$

[1.3.B10]. Nalezněte všechna přirozená čísla n, pro která platí :

$$(1+i)^n = (1-i)^n\,.$$

Návod : vyjádřete levou i pravou stranu v goniometrickém tvaru.

[1.3.B11]. Užitím Moivreovy věty a binomické věty odvoďte vzorce pro :

a) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$

b) $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$.

(vyjádřené jako funkce $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$).

[1.3.B12]. V oboru komplexních čísel nalezněte všechny n–té odmocniny z komplexního čísla c a výsledky vyjádřete v algebraickém tvaru. Při tom :

a) $n = 6$; $c = -1$

b) $n = 4$; $c = -\dfrac{1}{2} + i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

[1.3.B13]. V oboru komplexních čísel řešte binomickou rovnici a všechna její řešení napište v algebraickém tvaru.

a) $z^3 + 5 = 0$

b) $z^4 + 64 = 0$.

[1.3.B14]. V oboru komplexních čísel nalezněte všechny $n-$té odmocniny z komplexního čísla c a výsledky vyjádřete v goniometrickém tvaru. Při tom:

a) $n = 5$; $\quad c = \dfrac{(\sqrt{3} - i)^8 \cdot i}{(-1 + i)^6 \cdot (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})}$

b) $n = 8$; $\quad c = \dfrac{(1 - i)^6 \cdot (1 + i\sqrt{3})}{-(\sin\alpha + i\cos\alpha)^3}$

c) $n = 6$; $\quad c = \dfrac{(2 + i\sqrt{12})^4 \cdot (1 + i)^2}{i\sqrt{3} - 1}$

d) $n = 3$; $\quad c = \dfrac{(\sqrt{3} + i)^6 \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)^5}{2 \cdot (-1 + i)^4 \cdot (\cos\alpha - i\sin\alpha)^2}$.

[1.3.B15]. Napište v algebraickém tvaru a nakreslete všechny $n-$té odmocniny z jedné, pro:

a) $n = 3$ b) $n = 4$ c) $n = 6$ d) $n = 8$.

§ 4: ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI CELÝCH ČÍSEL

[1.4.A1]. U.p. celých čísel a, b, c tak, že $a \mid b \cdot c$, ale $a \nmid b \wedge a \nmid c$.

[1.4.A2]. U.p. celých čísel x, y tak, že $7 \nmid (21x - 56y)$.

[1.4.A3]. U.p. dvou různých celých čísel a, b tak, že $a \mid b \ \wedge \ b \mid a$.

[1.4.A4]. U.p. celého čísla a, které po dělení 8 dává zbytek -2.

[1.4.A5]. U.p. celých čísel a, b, k nimž neexistuje největší společný dělitel.

[1.4.A6]. U.p. dvou různých celých čísel a, b jejichž největším společným dělitelem je číslo -6.

[1.4.A7]. U.p. celých čísel a, b tak, že $a \equiv b \pmod 9 \ \wedge \ b \not\equiv a \pmod 9$.

[1.4.A8]. Uveďte, kolik existuje záporných čísel, která jsou kongruentní s číslem 6 podle modulu 7.

[1.4.A9]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná

pro to, aby celá čísla a, b byla kongruentní podle modulu 6.

[1.4.A10]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná

pro to, aby celá čísla a, b nebyla nesoudělná.

♣ ♣ ♣

[1.4.B1]. Nalezněte podíl q a zbytek r po dělení čísla a číslem b, je-li:

a) $a = 0, \quad b = 7$

b) $a = -5, \quad b = 7$

c) $a = 47, \quad b = -11$

d) $a = -47, \quad b = 11$

e) $a = n^2 + 1, \quad b = n + 1, \quad$ kde $\quad n \geq 2 \quad$ je celé číslo

f) $a = n^3 - 1, \quad b = n + 1, \quad$ kde $\quad n \quad$ je přirozené číslo.

[1.4.B2]. Nechť a je libovolné celé číslo. Dokažte, že

a) a^2 dává po dělení 4 zbytek 0 nebo 1

b) a^4 dává po dělení 8 zbytek 0 nebo 1 .

[1.4.B3]. Dokažte, že zbytek po dělení druhé mocniny libovolného celého čísla a číslem 12 může nabývat pouze čtyř hodnot a určete tyto hodnoty.

Návod: nejprve vyjádřete dělení čísla a číslem 6 .

[1.4.B4]. Rozhodněte, zda $a \equiv b \pmod{16}$, je-li:

a) $a = 75$, $b = 139$

b) $a = -75$, $b = 139$

c) $a = 0$, $b = 139$

d) $a = 0$, $b = 0$

[1.4.B5]. Nalezněte

a) zbytek po dělení čísla $(5^{40} + 7^{40})$ číslem 13

b) zbytek po dělení čísla $(2^{50} + 3^{50} + 4^{50})$ číslem 17.

[1.4.B6]. Nalezněte poslední dvě cifry čísla

a) 7^{9^9}

b) $14^{14^{14}}$

[1.4.B7]. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n mají čísla n^5 a n (vyjádřená v dekadickém zápisu) stejné poslední cifry.

Návod: vyjádřete číslo n dekadicky, tj.

$$n = a_k \cdot 10^k + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0, \text{ kde } 0 \leq a_i \leq 9$$

a ukažte, že $n^5 \equiv a_0 \pmod{10}$.

[1.4.B8]. Nechť pro celé číslo $p \geq 2$ platí: $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Dokažte, že potom p je prvočíslo.

[1.4.B9]. Nechť $a, b, c \in \mathbf{Z}$. Rozhodněte, zda následující tvrzení platí, či neplatí a svoje rozhodnutí zdůvodněte:

a) $a \mid c \wedge b \mid c \implies a \cdot b \mid c^2$

b) $a \mid c \vee b \mid c \implies a \cdot b \mid c^2$

c) $a \cdot b \mid c^2 \implies a \mid c \wedge b \mid c$

d) $a \cdot b \mid c^2 \implies a \mid c \vee b \mid c$.

[1.4.B10]. Nechť $a, b \in \mathbf{Z}$. Rozhodněte, zda následující tvrzení platí, či neplatí a svoje rozhodnutí zdůvodněte:

a) a , b jsou nesoudělná $\implies$ $a + b$, $a - b$ jsou nesoudělná

b) $a + b$, $a - b$ jsou nesoudělná $\implies$ a , b jsou nesoudělná.

[1.4.B11]. Od libovolného trojciferného přirozeného čísla odečteme poslední číslici, dvojnásobek předposlední číslice a čtyřnásobek první číslice. Dokažte, že takto vzniklé číslo je dělitelné osmi.

[1.4.B12]. Dokažte jednak matematickou indukcí a jednak bez použití matematické indukce, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí:

a) číslo $10^n - 1$ je dělitelné 9

b) číslo $n^3 - n$ je dělitelné 6 .

[1.4.B13]. Nalezněte všechna přirozená čísla n, pro která je číslo $10^n + 8$ dělitelné číslem 72 .

Návod: výpočet proveďte zvlášť pro $n = 1, 2$ a zvlášť pro $n \geq 3$.

[1.4.B14]. Dokažte matematickou indukcí, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí:

a) $\quad 133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$

b) $\quad 7 \nmid 2^n + 1$

[1.4.B15]. Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbf{N}$ existuje n po sobě jdoucích přirozených čísel, která jsou složenými čísly (tzn. v posloupnosti prvočísel jsou libovolně velké "mezery").

Návod: jako první číslo vezměte číslo $(n+1)! + 2$.

§ 5 : ZOBRAZENÍ

[1.5.A1]. U.p. zobrazení $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$, které

a) je injektivní a není surjektivní b) je surjektivní a není injektivní.

[1.5.A2]. U.p. injektivního zobrazení $f : A \times A \to 2^A$, je-li:

a) $A = \{a, b\}$ b) $A = \{a, b, c\}$.

[1.5.A3]. U.p. injektivního zobrazení

a) $f : \mathbf{Z} \to 2^{\mathbf{N}}$ b) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$.

[1.5.A4]. U.p. surjektivního zobrazení

a) $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ b) $f : 2^{\mathbf{N}} \to \mathbf{N}$.

[1.5.A5]. Uveďte, co všechno lze říci o počtu prvků konečné k-prvkové množiny A, víte-li, že

a) existuje injektivní zobrazení $2^A \to A \times A$

b) neexistuje žádné surjektivní zobrazení $A \times A \to A^A$.

[1.5.A6]. U.p. množiny B, její vlastní podmnožiny A (t.j. $A \subset B$) a bijektivního zobrazení $f : A \to B$.

[1.5.A7]. U.p. dvou zobrazení $f : \mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathbf{N}\times\mathbf{N}$, $g : \mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathbf{N}\times\mathbf{N}$ takových, že $f \circ g \neq g \circ f$.

[1.5.A8]. Nechť je $A = \{a, b\}$; u.p. zobrazení $f : 2^A \to A^A$ tak, že k tomuto zobrazení neexistuje inverzní zobrazení.

[1.5.A9]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná

pro to, aby zobrazení $f : A \to B$ nebylo surjektivní.

[1.5.A10]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná

pro to, aby zobrazení $f : A \to B$ bylo bijektivní.

♣ ♣ ♣

[1.5.B1]. Rozhodněte, zda zadaný předpis f určuje zobrazení množiny A do množiny B, je-li:

a) $A = \mathbf{Z}$, $B = \mathbf{N}$, $f(x) = |x|$ pro $\forall x \in \mathbf{Z}$

b) $A = \mathbf{Z}$, $B = \mathbf{Q}$, $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{3x^2 - 2}$ pro $\forall x \in \mathbf{Z}$

c) $A = \mathbf{Z}$, $B = \mathbf{Z}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 2 \mid x \\ -1 & \text{pro } 3 \mid x \\ 0 & \text{pro } 2 \nmid x \ \wedge \ 3 \nmid x \end{cases}$

[1.5.B2]. Nakreslete všechna zobrazení $A \to B$ a uveďte, která z nich jsou injektivní, resp. surjektivní, resp. bijektivní. Přitom

a) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$

b) $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y, z\}$.

[1.5.B3]. Zadejte (výčtem prvků) množinu A^B a množinu B^A, je-li:

a) $A = \{a\}$, $B = \{x, y, z\}$

b) $A = B = \{x, y\}$.

[1.5.B4]. Nechť A je n-prvková množina, B je s-prvková množina ($n, s \in \mathbf{N}$). Dokažte, že počet všech zobrazení $A \to B$ je roven s^n .

Návod: důkaz veďte matematickou indukcí vzhledem k n.

[1.5.B5]. Rozhodněte, zda dané zobrazení $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ je injektivní, resp. surjektivní, je-li pro každé $x \in \mathbf{N}$:

a) $f(x) = 5x - 3$

b) $f(x) = x^2 + 1$

c) $f(x) = \begin{cases} 6 & \text{pro } x \leq 6 \\ x - 6 & \text{pro } x > 6 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{pro } x \text{ sudé} \\ x + 1 & \text{pro } x \text{ liché} \end{cases}$

[1.5.B6]. Rozhodněte, zda dané zobrazení f je injektivní, resp. surjektivní, je-li:

a) $f : \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = x^2$

b) $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = x^2$

c) $f : \mathbf{Q} - \{0\} \to \mathbf{Q}^+$, $f(x) = x^2$

d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2+7x+12$

e) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$, $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x+3} & \text{pro } x \neq -3 \\ 1 & \text{pro } x = -3 \end{cases}$

f) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$, $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pro } x \text{ sudé} \\ \frac{3-x}{2} & \text{pro } x \text{ liché} \end{cases}$

[1.5.B7]. Rozhodněte, zda dané zobrazení f je injektivní, resp. surjektivní, je-li:

a) $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $\quad f((x, y)) = x + y$

b) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $\quad f(x) = (2x, 2x + 1)$

c) $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to 2^{\mathbf{N}}$, $\quad f((x, y)) = \{x, y\}$

d) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \times \{1, 2, 3\}$, $\quad f(x) = \begin{cases} (\frac{x}{3}, 1) & \text{pro } x \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3) \\ (\frac{x-1}{3}, 2) & \text{pro } x \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3) \\ (\frac{x+1}{3}, 3) & \text{pro } x \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3) \end{cases}$

e) $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{N} \to \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, $\quad f((x, y)) = \begin{cases} (\frac{y}{2}, x) & \text{pro } y \text{ sudé, přirozené} \\ (\frac{1-y}{2}, x) & \text{pro } y \text{ liché, přirozené} \end{cases}$

f) $f : 2^{\mathbf{N}} \to \mathbf{N}$, $\quad f(A) = \begin{cases} a_0 & \text{kde } a_0 \text{ je nejmenší číslo z } A, \text{ je-li } A \neq \emptyset \\ 1 & \text{je-li } A = \emptyset \end{cases}$

[1.5.B8]. Nechť A je n-prvková množina, B je s-prvková množina $(n, s \in \mathbf{N})$. Určete počet všech :

a) bijektivních zobrazení $A \to B$

b) injektivních zobrazení $A \to B$.

[1.5.B9]. Nechť $f : A \to B$ je zobrazení. Dokažte, že platí:

a) f je injektivní $\iff$ existuje zobrazení $g : B \to A$ tak, že $g \circ f = id_A$

b) f je surjektivní $\iff$ existuje zobrazení $h : B \to A$ tak, že $f \circ h = id_B$.

Návod: při důkazu " $\Longrightarrow$ " v a), resp. v b) hledané zobrazení g, resp. h přímo zkonstruujte.

[1.5.B10]. Nechť $f : A \to A$ je dané neidentické zobrazení. Dokažte, že pak existuje zobrazení $g : A \to A$ takové, že $f \circ g \neq g \circ f$.

Návod: z předpokladu plyne, že v množině A existují dva různé prvky a, b takové, že $f(a) = b$. Této skutečnosti pak využijte při konstrukci zobrazení g .

[1.5.B11]. Dokažte, že zobrazení $f : A \to B$ je bijektivní. Při tom:

a) $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $B = \mathbf{N}$, $\quad f((x, y)) = 2^{x-1} \cdot (2y - 1)$

b) $A = (a, b)$, $B = (c, d)$, $\quad f(x) = c + \dfrac{d-c}{b-a} \cdot (x - a)$

c) $A = (a, b)$, $B = \mathbf{R}^+$, $\quad f(x) = \dfrac{x-a}{b-x}$

d) $A = (a, b)$, $B = \mathbf{R}$; resp. p je pevné reálné číslo takové, že $a < p < b$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-p}{x-a} & \text{pro } a < x \leq p \\ \dfrac{x-p}{b-x} & \text{pro } p \leq x < b \end{cases}$$

kde $(a, b), (c, d)$ značí otevřené intervaly na reálné ose.

Návod: v a) využijte větu o rozkladu čísla na součin prvočísel.

[1.5.B12]. Jsou dána bijektivní zobrazení $f, g : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ takto :

$$f(x) = 3x - 4 \,, \qquad g(x) = 2x + \tfrac{5}{3} \qquad \text{pro } \forall x \in \mathbf{Q} .$$

Nalezněte předpis zadávající zobrazení:

$f \circ g$; $g \circ f$; $(f \circ g)^{-1}$; $(g \circ f)^{-1}$; f^{-1} ; g^{-1} ; $f^{-1} \circ g^{-1}$; $g^{-1} \circ f^{-1}$.

[1.5.B13]. Nechť A, B, C jsou množiny a nechť $\varphi : A \to B$ je bijektivní zobrazení. Dokažte, že bijektivním zobrazením je pak také zobrazení:

a) $F : A^C \to B^C$, definované : $\quad F(f) = \varphi \circ f \quad$ pro $\forall f \in A^C$

b) $G : C^A \to C^B$, definované : $\quad G(g) = g \circ \varphi^{-1} \quad$ pro $\forall g \in C^A$.

[1.5.B14]. Nechť $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ je zobrazení, splňující podmínku:

$$(f \circ f)(x) = -x \,, \qquad \text{pro každé } x \in \mathbf{Z} .$$

Dokažte, že pak platí :

a) f je bijektivní zobrazení

b) $f(x) = 0 \iff x = 0$.

[1.5.B15]. Nechť A, B jsou konečné množiny přirozených čísel; nechť $f : A \to B$ je injektivní zobrazení s vlastností: $x \leq f(x)$ pro $\forall x \in A$, $g : B \to A$ je injektivní zobrazení s vlastností: $y \leq g(y)$ pro $\forall y \in B$.

Dokažte, že pak platí : $\quad A = B \quad$ a $\quad f = id_A = g$.

Návod: označte $h = g \circ f$, ukažte, že h je bijekce splňující podmínku $x \leq h(x)$ pro každé $x \in A$ a dále (sporem) ukažte, že $h = id_A$.

§ 6 : RELACE

[1.6.A1]. Nechť $M = \{x, y, z\}$. Uveďte, kolik lze definovat různých relací
a) mezi množinami M a 2^M b) mezi množinami M a $\emptyset$
c) na množině M d) na množině $M \times M$.

[1.6.A2]. U.p. neprázdné relace ϱ mezi množinami $\mathbf{N}$ a $\mathbf{Z}$ a neprázdné relace σ mezi množinami $\mathbf{Z}$ a $\mathbf{Q}$ tak, že složená relace $\sigma \circ \varrho$ je prázdnou relací.

[1.6.A3]. U.p. relací ϱ, σ na množině $M = \{a, b\}$ tak, že ϱ, σ nejsou univerzálními relacemi na M, ale $\sigma \circ \varrho$ je univerzální relací na M.

[1.6.A4]. U.p. množiny M a relace ϱ na M, která je současně symetrická a antisymetrická.

[1.6.A5]. U.p. množiny M a relace ϱ na M, která není symetrická a není antisymetrická.

[1.6.A6]. U.p. relace ϱ na množině $\mathbf{Z}$, různé od relace rovnosti tak, že relace ϱ je reflexivní a není úplná.

[1.6.A7]. U.p. relace ϱ na množině $\mathbf{N}$ tak, že relace ϱ je úplná a není reflexivní.

[1.6.A8]. U.p. neprázdné relace ϱ na množině $\mathbf{N}$ tak, že relace ϱ je tranzitivní a není reflexivní.

[1.6.A9]. U.p. množiny A tak, aby relace inkluze $\subseteq$ na množině 2^A byla úplnou relací.

[1.6.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
pro to, aby relace ϱ na množině M byla úplnou relací.

♣ ♣ ♣

[1.6.B1]. Uveďte příklad dvou různých relací ϱ a σ mezi množinami $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Potom popište (množinově, graficky a tabulkou) relace: ϱ^{-1}, resp. σ^{-1}, resp. $\varrho \cap \sigma$, resp. $\varrho \cup \sigma$.

[1.6.B2]. Proveďte množinový zápis relace ϱ na množině $\mathbf{N}$, která je slovně popsána takto:

a) číslo 3 je v relaci ϱ se všemi přirozenými čísly a dále všechna sudá přirozená čísla větší než 50 jsou v relaci ϱ se všemi lichými přirozenými čísly

b) číslo 3 je v relaci ϱ s čísly 3 a 7 a dále, všechna čísla větší jak 7 jsou v relaci ϱ se všemi přirozenými čísly, která jsou dělitelná 3 a 7

c) každé přirozené číslo je v relaci ϱ se všemi přirozenými čísly kromě sebe sama

d) v relaci ϱ jsou navzájem všechna prvočísla a dále jsou v relaci ϱ navzájem ta složená čísla, která jsou nesoudělná.

[1.6.B3]. Nechť ϱ je relace mezi množinami $\mathbf{Z}$ a $\mathbf{N}$, definovaná:

$$\varrho = \{(x\,,\,3x^2+1) \mid \text{pro}\,\forall\, x \in \mathbf{Z}\}\ ,$$

resp. σ je relace mezi množinami $\mathbf{N}$ a $\mathbf{Z}$, definovaná:

$$\sigma = \{(a, b) \mid b = -a \ \vee\ b = a^2 - 3\ ,\ \text{pro } a, b \in \mathbf{N}\}\ .$$

Pak popište relaci $\sigma \circ \varrho$ a relaci $\varrho \circ \sigma$.

[1.6.B4]. Nechť ϱ je relace mezi množinami A a B; nechť σ_i je relace mezi množinami B a C pro každé $i \in I$ (kde I je daná neprázdná indexová množina). Dokažte, že:

a) $(\bigcup\limits_{i\in I} \sigma_i) \circ \varrho = \bigcup\limits_{i\in I} (\sigma_i \circ \varrho)$

b) $(\bigcap\limits_{i\in I} \sigma_i) \circ \varrho \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} (\sigma_i \circ \varrho)$

c) ve vztahu b) obecně neplatí rovnost.

[1.6.B5]. Nechť ϱ_i (pro každé $i \in I$) je relace mezi množinami A a B. Dokažte, že pak platí:

a) $(\bigcup\limits_{i\in I} \varrho_i)^{-1} = \bigcup\limits_{i\in I} \varrho_i^{-1}$

b) $(\bigcap\limits_{i\in I} \varrho_i)^{-1} = \bigcap\limits_{i\in I} \varrho_i^{-1}$.

[1.6.B6]. Nechť $M = \{a, b\}$. Vypište:

a) všechny relace na množině M

b) všechny tranzitivní relace na M

c) všechny relace na M, které nejsou tranzitivní.

d) všechny relace na M, které nejsou antisymetrické

[1.6.B7]. Nechť M je n-prvková, neprázdná množina. Určete, kolik celkem existuje

a) reflexivních relací na M

b) symetrických relací na M

c) antisymetrických relací na M

d) úplných relací na M

e) relací na M, které jsou současně reflexivní a symetrické

f) relací na M, které jsou současně reflexivní a antisymetrické.

[1.6.B8]. Je dána relace ϱ na množině $\mathbf{N}$. Rozhodněte, zda relace ϱ je reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní, úplná, je-li pro $x, y \in \mathbf{N}$:

a) $x\varrho y \iff x \cdot y$ je liché číslo

b) $x\varrho y \iff x, y$ jsou nesoudělná čísla

c) $x\varrho y \iff y = x \quad \vee \quad y = 2x \quad \vee \quad y = 3x$

[1.6.B9]. Je dána relace ϱ na množině $\mathbf{Z}$. Rozhodněte, zda relace ϱ je reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní, úplná, je-li pro $x, y \in \mathbf{Z}$:

a) $x\varrho y \iff x^2 = y$

b) $x\varrho y \iff 3 \mid (x + 2y)$

c) $x\varrho y \iff |x| < |y|$

[1.6.B10]. Je dána relace ϱ na množině 2^A, kde A je neprázdná, konečná množina. Rozhodněte, zda ϱ je reflexivní relace, resp. symetrická relace, resp. antisymetrická relace, resp. tranzitivní relace, resp. úplná relace, je-li pro $X, Y \in 2^A$:

a) $X\varrho Y \iff X \cup Y = A$

b) $X\varrho Y \iff X \cap Y \neq \emptyset$

c) $X\varrho Y \iff X = \emptyset \quad \text{nebo} \quad Y = A$

Návod: uvědomte si, že v některých případech může vyšetřovaná vlastnost záviset na počtu prvků množiny A.

[1.6.B11]. Na množině $M = \{a, b, c\}$ udejte (tabulkou) příklad relací ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 tak, aby každá z těchto relací měla vždy právě jenom jednu z vlastností: reflexivní, symetrická, antisymetrická, úplná.

[1.6.B12]. Dokažte, že průnik libovolného počtu

a) reflexivních relací na M je opět reflexivní relací na M

b) symetrických relací na M je opět symetrickou relací na M

c) relací na M, z nichž alespoň jedna je antisymetrická, je antisymetrickou relací na M

d) tranzitivních relací na M je opět tranzitivní relací na M

e) úplných relací na M nemusí být úplnou relací na M.

[1.6.B13]. Dokažte, že sjednocení libovolného počtu

a) relací na M, z nichž alespoň jedna je reflexivní, je reflexivní relací na množině M

b) symetrických relací na M je opět symetrickou relací na M

c) antisymetrických relací na M nemusí být antisymetrickou relací na množině M

d) tranzitivních relací na M nemusí být tranzitivní relací na M

e) relací na M, z nichž alespoň jedna je úplná, je úplnou relací na M.

[1.6.B14]. Nechť ϱ, σ jsou relace na M. Dokažte, že:

a) jsou-li ϱ, σ reflexivní, pak relace $\sigma \circ \varrho$ je reflexivní

b) jsou-li ϱ, σ symetrické, pak relace $\sigma \circ \varrho$ nemusí být symetrická

c) jsou-li ϱ, σ antisymetrické, pak relace $\sigma \circ \varrho$ nemusí být antisymetrická

d) jsou-li ϱ, σ tranzitivní, pak relace $\sigma \circ \varrho$ nemusí být tranzitivní

e) jsou-li ϱ, σ úplné, pak relace $\sigma \circ \varrho$ je úplná.

[1.6.B15]. Nechť ϱ, σ jsou symetrické relace na M. Dokažte, že pak:

$$\sigma \circ \varrho \text{ je symetrická relace} \iff \sigma \circ \varrho = \varrho \circ \sigma\,.$$

§ 7: USPOŘÁDANÉ MNOŽINY

[1.7.A1]. Nakreslete hasseovský diagram čtyřprvkové uspořádané množiny, která má dva maximální prvky a nemá nejmenší prvek.

[1.7.A2]. Nakreslete hasseovský diagram čtyřprvkové uspořádané množiny, v níž každý prvek je současně maximálním prvkem i minimálním prvkem.

[1.7.A3]. Nakreslete hasseovský diagram konečné uspořádané množiny, která má tři minimální prvky a žádný maximální prvek.

[1.7.A4]. Nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny (M, ϱ), která má jeden maximální prvek a nemá největší prvek.

[1.7.A5]. Nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny (M, ϱ), která obsahuje právě dva nesrovnatelné prvky a nemá přitom žádný maximální prvek ani minimální prvek.

[1.7.A6]. Nakreslete hasseovský diagram sedmiprvkové uspořádané množiny (M, ϱ), která není lineárně uspořádaná a

a) je svazem b) není svazem.

[1.7.A7]. U.p. uspořádané množiny (M, ϱ), která má jeden nejmenší prvek a tři minimální prvky.

[1.7.A8]. U.p. nekonečné uspořádané množiny (M, ϱ), která neobsahuje žádné různé srovnatelné prvky.

[1.7.A9]. U.p. množiny A tak, aby uspořádaná množina $(2^A, \subseteq)$ byla lineárně uspořádaná.

[1.7.A10]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná

pro to, aby uspořádaná množina $(M \varrho)$ byla svazem.

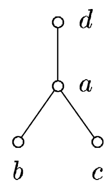
♣ ♣ ♣

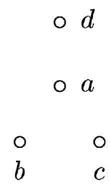
[1.7.B1]. Na množině $M = \{a, b, c, d\}$ je dána relace ϱ. Dokažte, že ϱ je relací uspořádání a nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny (M, ϱ), je-li:

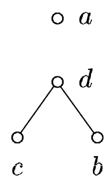
a) $\varrho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(b,a),(b,c),(b,d)\}$

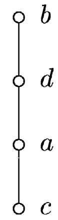
b) $\varrho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(d,a),(b,c)\}$.

[1.7.B2]. Uspořádaná množina (M, ϱ), kde $M = \{a, b, c, d\}$ je zadána hasseovským diagramem. Popište (výčtem prvků) relaci uspořádání ϱ, je-li:

a) 

b) 

c) 

d) 

[1.7.B3]. Je dána množina M. Rozhodněte kolik relací uspořádání lze na množině M definovat a nakreslete odpovídající hasseovské diagramy takto vzniklých uspořádaných množin, je-li:

a) $M = \{a, b\}$

b) $M = \{a, b, c\}$.

[1.7.B4]. Nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny $(2^A, \subseteq)$, je-li:

a) $A = \emptyset$ b) $A = \{a\}$ c) $A = \{a, b\}$ d) $A = \{a, b, c\}$.

[1.7.B5]. Na množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je definována relace ϱ takto:

$$x \varrho y \iff \exists \text{ přirozené číslo } n \text{ tak, že } x = n \cdot y\,.$$

Dokažte, že ϱ je relací uspořádání a sestrojte hasseovský diagram uspořádané množiny (M, ϱ).

[1.7.B6]. Rozhodněte, zda $(\mathbf{N}, \varrho)$ je uspořádaná množina, resp. lineárně uspořádaná množina, resp. svaz, resp. úplný svaz.
Pokud je $(\mathbf{N}, \varrho)$ uspořádaná množina, pak schematicky nakreslete její hasseovský diagram.
Relace ϱ je definována pro $x, y \in \mathbf{N}$ takto:

a) $x \varrho y \iff y = 4 \ \vee\ y = x$

b) $x \varrho y \iff x \not\equiv y \pmod 5$

c) $x \varrho y \iff$ počet cifer čísla x je menší nebo roven počtu cifer čísla y

d) $x \varrho y \iff (x = y) \vee (x \text{ je liché} \wedge y \text{ je sudé}) \vee (x + y \text{ je sudé} \wedge x < y)$.

[1.7.B7]. Rozhodněte, zda $(\mathbf{Z}, \varrho)$ je uspořádaná množina, resp. lineárně uspořádaná množina, resp. svaz, resp. úplný svaz.
Pokud je $(\mathbf{Z}, \varrho)$ uspořádaná množina, pak schematicky nakreslete její hasseovský diagram.
Relace ϱ je definována pro $x, y \in \mathbf{Z}$ takto:

a) $x \varrho y \iff x < y$

b) $x \varrho y \iff y \leq x$

c) $x \varrho y \iff x \mid y$ (tj. $\exists z \in \mathbf{Z} : y = z \cdot x$)

d) $x \varrho y \iff (x = y) \vee (x, y$ jsou sudá čísla $\wedge\ x < y)$.

[1.7.B8]. Nechť $M = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_8, f_9\}$, kde pro $1 \leq i \leq 9$ je $f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zobrazení, definované pro $\forall\, x \in \mathbf{R}$ takto:

$$f_1(x) = |x| - 4\,, \qquad f_2(x) = |x| - 3\,, \qquad f_3(x) = |x| - 2\,,$$

$$f_4(x) = -|x| + 4\,, \qquad f_5(x) = -|x| + 3\,, \qquad f_6(x) = -|x| + 2\,,$$

$$f_7(x) = -|x|\,, \qquad f_8(x) = |x + 2|\,, \qquad f_9(x) = 2\ .$$

Na množině M je definována relace ϱ takto :

$$f_i \,\varrho\, f_j \iff \text{pro každé } x \in \langle -2, 2\rangle \text{ platí : } f_i(x) \leq f_j(x)\,.$$

Dokažte, že ϱ je relace uspořádání na M a nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny (M, ϱ).

[1.7.B9]. Na množině reálných čísel $\mathbf{R}$ je definována relace ϱ takto: pro $x, y \in \mathbf{R}$ je

$$x \varrho y \iff \exists c \in \mathbf{R}\,,\ c \geq 1 \ \text{ tak, že } \ c \cdot x = y\,.$$

Dokažte, že ϱ je relace uspořádání na $\mathbf{R}$ a načrtněte schematicky hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathbf{R}, \varrho)$.

[1.7.B10]. Nechť ϱ, σ jsou relace uspořádání na množině M. Dokažte, že potom:

a) relace ϱ^{-1} je uspořádání na M

b) relace $\varrho \cap \sigma$ je uspořádání na M

c) relace $\varrho \cup \sigma$ obecně není uspořádání na M

d) relace $\sigma \circ \varrho$ obecně není uspořádání na M.

[1.7.B11]. Vypište všechny minimální prvky, resp. maximální prvky, resp. nejmenší prvky, resp. největší prvky všech uspořádaných množin ze cvičení

a) [1.7.B2] b) [1.7.B6] c) [1.7.B7] d) [1.7.B8].

[1.7.B12]. Nechť ϱ je relace uspořádání na konečné množině M. Dokažte, že pak v (M, ϱ) existuje alespoň jeden minimální a alespoň jeden maximální prvek.

[1.7.B13]. Nechť ϱ je relace uspořádání na konečné množině M a nechť v uspořádané množině (M, ϱ) existuje jediný minimální prvek u.
Potom:

a) dokažte, že u je nejmenším prvkem v (M, ϱ)

b) rozhodněte, zda stejné tvrzení platí i v případě, že množina M je nekonečná.

[1.7.B14]. Nechť A je konečná, neprázdná množina přirozených čísel. Na množině $M = 2^A - \{\emptyset\}$ definujeme relaci ϱ takto: pro $X, Y \in M$ je $X \varrho Y$ právě když

$\exists$ injektivní zobrazení $f : X \to Y$ takové, že $x \leq f(x)$ pro $\forall\, x \in X$.

Potom:

a) dokažte, že ϱ je relace uspořádání na M
b) nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny (M, ϱ) pro případ, že $A = \{1, 2, 3\}$
c) dokažte, že pro $X, Y \in M$ platí: $X \subseteq Y \implies X \varrho Y$
d) ukažte, že předchozí implikaci nelze obrátit.

Návod: při důkazu a) využijte cvičení [1.4.B16].

[1.7.B15]. Nechť (A, ϱ), (B, σ) jsou uspořádané množiny a $A \cap B = \emptyset$. Na množině $A \cup B$ definujeme relaci τ takto: pro $x, y \in A \cup B$ je

$$x \tau y \iff (x, y \in A \ \wedge\ x \varrho y) \ \vee\ (x, y \in B \ \wedge\ x \sigma y) \ \vee\ (x \in A, y \in B)\,.$$

Potom:

a) dokažte, že τ je relace uspořádání na $A \cup B$
b) dokažte, že τ je lineární uspořádání $\iff$ ϱ i σ jsou lineární uspořádání
c) nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny $(A \cup B,\ \tau)$, je-li (A, ϱ) uspořádaná množina ze cvičení [1.7.B4] c), resp. (B, σ) je uspořádaná množina ze cvičení [1.7.B2] c)
d) nakreslete schematicky hasseovský diagram uspořádané množiny $(A \cup B, \tau)$, je-li A množina všech sudých přirozených čísel, B je množina všech lichých přirozených čísel a ϱ i σ jsou obvyklá uspořádání čísel podle velikosti.

§ 8: EKVIVALENCE A ROZKLADY

[1.8.A1]. U.p. relace ϱ na množině **Z**, která je současně ekvivalencí i uspořádáním. Dále uveďte, kolik takových relací existuje.

[1.8.A2]. U.p. relace ϱ na množině **N**, která je reflexivní a tranzitivní, ale není ekvivalencí ani uspořádáním.

[1.8.A3]. U.p. relace ekvivalence ϱ na množině **R** tak, aby rozklad $\mathbf{R}/\varrho$ (tj. rozklad na **R**, příslušný ekvivalenci ϱ) měl právě 3 třídy rozkladu.

[1.8.A4]. U.p. rozkladu na **R**, který má konečně mnoho tříd, přičemž každá třída obsahuje konečně mnoho prvků.

[1.8.A5]. U.p. rozkladu na **N**, který má nekonečně mnoho tříd, přičemž každá třída obsahuje nekonečně mnoho prvků.

[1.8.A6]. U.p. zobrazení $f : \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$ tak, aby rozklad příslušný zobrazení f měl nekonečně mnoho tříd rozkladu.

[1.8.A7]. U.p. zobrazení $f : \mathbf{R} \to \mathbf{Z}_3$ tak, aby rozklad příslušný zobrazení f měl
a) 2 třídy rozkladu b) 4 třídy rozkladu.

[1.8.A8]. Uveďte všechny hodnoty modulu m pro které čísla -7 a 7 patří do stejné zbytkové třídy podle tohoto modulu m.

[1.8.A9]. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
pro to, aby relace ϱ na množině M byla ekvivalencí.

[1.8.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
pro to, aby systém množin $\mathcal{M} = \{A, B\}$, kde $A, B \subseteq \mathbf{N}$, byl rozkladem na **N**.

♣ ♣ ♣

[1.8.B1]. Na množině $M = \{a, b, c, d\}$ je definována relace ϱ. Rozhodněte, zda ϱ je relací ekvivalence na množině M a pokud tomu tak je, pak sestrojte rozklad M/ϱ (tj. rozklad na množině M příslušný ekvivalenci ϱ). Přitom:

a) $\varrho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,a),(d,c),(c,d)\}$

b) $\varrho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(a,d),(d,a),(b,d),(d,b)\}$.

[1.8.B2]. Určete, kolik různých rozkladů lze utvořit na množině M a všechny tyto rozklady vypište. Přitom:

a) $M = \{a, b\}$

b) $M = \{a, b, c\}$

c) $M = \{a, b, c, d\}$.

[1.8.B3]. Na množině $M = \{u, v, x, y, z\}$ je dán rozklad $\mathcal{R}$. Sestrojte tabulku relace $\sim_{\mathcal{R}}$ (tj. relace ekvivalence na množině M, příslušné rozkladu $\mathcal{R}$). Přitom:

a) $\mathcal{R} = \{\{u\},\{x\},\{z\},\{v,y\}\}$

b) $\mathcal{R} = \{\{u,y\},\{v,x,z\}\}$.

[1.8.B4]. Na množině $M = \{1, 2, 3, \ldots, 18, 19, 20\}$ definujeme relaci ϱ takto:

$$x \,\varrho\, y \iff \text{čísla } x, y \text{ mají stejný součet cifer}.$$

Pak dokažte, že ϱ je relací ekvivalence na M a sestrojte rozklad M/ϱ (tj. rozklad na M, příslušný ekvivalenci ϱ).

[1.8.B5]. Na množině M je definována relace ϱ. Rozhodněte, zda ϱ je relací ekvivalence na M, je-li

a) $M = \mathbf{Z}$; $\varrho = \{(x,y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid y = x \text{ nebo } y = x + 1\}$

b) $M = \mathbf{R}$; $\varrho = \{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x - y \in \mathbf{Z}\}$

c) $M = 2^{\mathbf{N}}$; $\varrho = \{(A,B) \in 2^{\mathbf{N}} \times 2^{\mathbf{N}} \mid (A - B) \text{ je konečná množina}\}$

d) $M = 2^{\mathbf{N}}$; $\varrho = \{(A,B) \in 2^{\mathbf{N}} \times 2^{\mathbf{N}} \mid (A \div B) \text{ je konečná množina}\}$

[1.8.B6]. Na množině **Z** je definována relace ϱ. Dokažte, že ϱ je relací ekvivalence na **Z** a popište rozklad $\mathbf{Z}/\varrho$ (tj. rozklad na **Z**, příslušný ekvivalenci ϱ). Přitom pro $x, y \in \mathbf{Z}$ je:

a) $x \varrho y \iff \exists\, k \in \mathbf{Z} : y = x + 4k$

b) $x \varrho y \iff x^2 \equiv y^2 \pmod 7$

c) $x \varrho y \iff x^2 + 2x = y^2 + 2y$

d) $x \varrho y \iff 2 \mid (x^2 - y^2)$.

[1.8.B7]. Na množině $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ je definována relace ϱ. Dokažte, že ϱ je ekvivalencí na $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ a načrtněte, jak vypadá rozklad $\mathbf{R} \times \mathbf{R}/\varrho$ (zde $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ chápeme jako množinu všech bodů v rovině). Přitom pro $(x, y), (u, v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ je:

a) $(x, y)\, \varrho\, (u, v) \iff x - u = 0$

b) $(x, y)\, \varrho\, (u, v) \iff y - v = 2(x - u)$

c) $(x, y)\, \varrho\, (u, v) \iff (x - u)(x + u) = (v - y)(v + y)$

d) $(x, y)\, \varrho\, (u, v) \iff x^2 + y^2 + x + y = u^2 + v^2 + u + v.$

[1.8.B8]. Je zadán systém $\mathcal{M}$ jistých podmnožin množiny $\mathbf{R}$. Rozhodněte, zda $\mathcal{M}$ je rozklad na $\mathbf{R}$ a pokud tomu tak je, pak definujte relaci $\sim_{\mathcal{M}}$ (tj. relaci ekvivalence na $\mathbf{R}$, příslušnou rozkladu $\mathcal{M}$). Přitom:

a) $\mathcal{M} = \{\langle a, a+1) \mid a \in \mathbf{Z}\}$

b) $\mathcal{M} = \{\langle a, a+2) \mid a \in \mathbf{Z}\}$

c) $\mathcal{M} = \{\{0\}, (-\infty, 0), (0, \infty)\}$

d) $\mathcal{M} = \{\mathbf{R}\}$.

[1.8.B9]. Dokažte, že

a) inverzní relace k ekvivalenci na M je opět ekvivalencí na M

b) průnik libovolného počtu ekvivalencí na M je opět ekvivalencí na M

c) sjednocení dvou ekvivalencí na M nemusí být ekvivalencí na M

d) složení dvou ekvivalencí na M nemusí být ekvivalencí na M.

[1.8.B10]. Na množině M je dána relace ϱ, která je je reflexivní a tranzitivní. Definujeme na M relaci τ takto: pro $x, y \in M$ položíme

$$x\, \tau\, y \iff x\, \varrho\, y \ \wedge\ y\, \varrho\, x\,.$$

Dokažte, že relace τ je relací ekvivalence na množině M.

[1.8.B11]. Nechť ϱ, σ jsou relace ekvivalence na množině M.
Dokažte, že pak relace $\varrho \cup \sigma$ je ekvivalencí na M právě když pro každé $X \in M/\varrho$ a každé $Y \in M/\sigma$ platí:

$$X \subseteq Y \quad \text{nebo} \quad Y \subseteq X \quad \text{nebo} \quad X \cap Y = \emptyset.$$

[1.8.B12]. Nechť ϱ, σ jsou ekvivalence na množině M. Dokažte, že pak relace $\varrho \circ \sigma$ je ekvivalencí na M právě když $\varrho \circ \sigma = \sigma \circ \varrho$

[1.8.B13]. Nechť ϱ, σ jsou relace ekvivalence na M, resp. nechť $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ jsou rozklady na M. Dokažte, že platí:

a) $\varrho \neq \sigma \implies M/\varrho \neq M/\sigma$

b) $\mathcal{R} \neq \mathcal{S} \implies \sim_{\mathcal{R}} \neq \sim_{\mathcal{S}}$.

Návod: obě tvrzení dokazujte nepřímo.

[1.8.B14]. Je dáno zobrazení $f : A \to B$. Popište rozklad $\mathcal{M}$ na množině A, příslušný zobrazení f, je-li:

a) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{x, y, z\}$,
$f(a) = z\,, \quad f(b) = y\,, \quad f(c) = z\,, \quad f(d) = z\,, \quad f(e) = y$

b) $A = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{Z}$, $f(x) = [\,x\,]$, pro $\forall x \in \mathbf{R}$

c) $A = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{Z}$, $f(x) = |\,[\,x\,]\,|$, pro $\forall x \in \mathbf{R}$

d) $A = 2^{\mathbf{N}}$, $B = \mathbf{Z}$, $\quad f(X) = \begin{cases} -1 & \text{je-li } X \text{ konečná, neprázdná} \\ 0 & \text{je-li } X = \emptyset \\ 1 & \text{je-li } X \text{ nekonečná} \end{cases}$

přitom symbol $[\,x\,]$ v b), c) značí celou část čísla x, tj. největší celé číslo, které nepřevyšuje číslo x.

[1.8.B15]. Nechť $\mathcal{R}$ je rozklad na množině M. Definujme zobrazení $f : M \to \mathcal{R}$, tak, že každému prvku $x \in M$ přiřadíme tu třídu rozkladu $\mathcal{R}$, v níž prvek x leží, tj.

$$f(x) = X\,, \qquad \text{kde } X \in \mathcal{R} \ \wedge \ x \in X\,.$$

Pak:

a) dokažte, že f je surjektivní zobrazení

b) udejte nutnou a dostatečnou podmínku pro to, aby f bylo injektivní

KAPITOLA 2:

ZÁKLADNÍ ALGEBRAICKÉ STRUKTURY

§ 1: ALGEBRAICKÉ STRUKTURY S JEDNOU OPERACÍ

[2.1.A1]. Uveďte, kolika různými způsoby je možno definovat operaci na množině $G = \{x, y, z\}$.

[2.1.A2]. U.p. grupoidu $(G, \cdot)$ tak, že tento grupoid má jedničkou, ale není pologrupou.

[2.1.A3]. U.p. grupoidu $(G, \cdot)$ ve kterém neplatí zákony o dělení.

[2.1.A4]. U.p. konečné pologrupy, která nemá neutrální prvek.

[2.1.A5]. U.p. nekonečné pologrupy, ve které neplatí zákony zákony o krácení.

[2.1.A6]. U.p. pologrupy s jedničkou, v níž k některému prvku existují dva prvky inverzní.

[2.1.A7]. U.p. dvou různých grup tak, že každá z těchto grup má 10 prvků.

[2.1.A8]. U.p. dvou nekomutativních grup tak, že jedna je konečná a druhá je nekonečná.

[2.1.A9]. U.p. pologrupy, ve které platí zákony o dělení a neplatí zákony o krácení.

[2.1.A10]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná

c) je nutná a dostatečná

pro to, aby pologrupa $(G, \cdot)$ byla grupou.

♣ ♣ ♣

[2.1.B1]. Je dána množina G a předpis $\circ$. Rozhodněte, zda tento předpis definuje operaci na G. Přitom:

a) $G = \{-1, 0, 1\}$; $x \circ y = x + y$

b) $G = \{-1, 0, 1\}$; $x \circ y = x \cdot y$

c) G je množina všech sudých celých čísel ; $x \circ y = \dfrac{x+y}{2}$

d) $G = \mathbf{Z}$; $x \circ y = \begin{cases} y & \text{je-li } x = 3 \\ x+1 & \text{je-li } y = 3 \\ 3 & \text{je-li } x \neq 3 \ \wedge \ y \neq 3 \end{cases}$

[2.1.B2]. Na množině $G = \{a, b, c, d\}$ je dána operace $\circ$ tabulkou. Rozhodněte, zda grupoid $(G, \circ)$ je komutativní, resp. asociativní, resp. zda má neutrální prvek. Přitom:

a)

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	a	b	c	d
c	a	b	c	d
d	a	b	c	d

b)

$\circ$	a	b	c	d
a	b	a	b	b
b	a	b	c	d
c	b	c	b	b
d	b	d	b	b

[2.1.B3]. Je dán grupoid $(G, \circ)$. Rozhodněte zda tento grupoid je komutativní, resp. asociativní, resp. zda má neutrální prvek. Přitom:

a) $G = \mathbf{Z}$, $x \circ y = |x|$

b) $G = \mathbf{R}^+$, $x \circ y = \dfrac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$

c) $G = \mathbf{R}$, $x \circ y = (x + y)(1 + xy)$

d) $G = 2^{\mathbf{N}}$, $X \circ Y = \begin{cases} \emptyset & \text{je-li } X \cap Y = \emptyset \\ \mathbf{N} & \text{je-li } X \cap Y \neq \emptyset \end{cases}$

[2.1.B4]. Nechť $(G, \cdot)$ je grupoid; nechť $a, b, c, d \in G$. Potom:

a) vypište všechny možné součiny prvků a, b, c, d v tomto pořadí (tj. při všech možných uzávorkováních)

b) je-li $(G, \cdot)$ navíc pologrupa, pak pouze s využitím asociativního zákona dokažte, že všechny možné součiny prvků a, b, c, d (v tomto pořadí) se nazájem rovnají.

[2.1.B5]. Je dán grupoid $(\mathbf{N}^{\mathbf{N}}, \circ)$, tj. množina všech zobrazení $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ s operací skládání zobrazení. Dokažte, že $(\mathbf{N}^{\mathbf{N}}, \circ)$ je pologrupa s jedničkou, která není grupou.

[2.1.B6]. Dokažte, že daný grupoid $(G, \circ)$ má neutrální prvek. Dále pak nalezněte ke každému prvku z G všechny prvky inverzní (pokud existují). Přitom:

a) $G = \mathbf{Z}$; $x \circ y = x + y + x \cdot y$

b) $G = \mathbf{Z}$; $x \circ y = \begin{cases} y & \text{je-li } x = 3 \\ x & \text{je-li } y = 3 \\ 3 & \text{je-li } x \neq 3 \ \wedge \ y \neq 3 \end{cases}$

[2.1.B7]. Dokažte, že daná pologrupa $(G, \circ)$ má neutrální prvek. Dále pak nalezněte každý prvek z G, k němuž existuje prvek inverzní a tento inverzní prvek určete. Přitom:

a) $G = \mathbf{Z}$; $x \circ y = x + y - xy$

b) $G = \mathbf{Q}$; $x \circ y = x + y - xy$

c) $G = \mathbf{Z}_6$; $\circ$ je násobení zbytkových tříd podle modulu 6

d) $G = \mathbf{Z}_7$; $\circ$ je násobení zbytkových tříd podle modulu 7.

[2.1.B8]. Rozhodněte, zda v daném grupoidu:

a) $(\mathbf{Z}_2, +)$ b) $(\mathbf{Z}_{16}, \cdot)$ c) $(\mathbf{N}, +)$ d) $(2^{\mathbf{N}}, \cap)$

platí zákony o dělení, resp. platí zákony o krácení.

[2.1.B9]. Nechť grupoid $(G, \circ)$, kde G je konečná množina, je zadán tabulkou. Popište, jak se z této tabulky pozná, že

a) operace $\circ$ je komutativní

b) $(G, \circ)$ má neutrální prvek

c) v $(G, \circ)$ platí zákony o dělení

d) v $(G, \circ)$ platí zákony o krácení.

[2.1.B10]. Určete, kolika způsoby se dá doplnit tabulka operace $\circ$ na množině $G = \{x, y, z\}$ tvaru

$\circ$	x	y	z
x	z	y	x
y	.	.	y
z	.	.	.

tak, aby $(G, \circ)$

a) byl grupoid
b) byl komutativní grupoid
c) byl grupoid s jedničkou
d) byla komutativní pologrupa
e) byla pologrupa s jedničkou
f) byla grupa.

[2.1.B11]. Je dán komutativní grupoid $(G, \circ)$. Rozhodněte, zda $(G, \circ)$ je komutativní grupou.
Přitom:

a) $G = \mathbf{Q}^+$; $\circ$ je násobení čísel

b) $G = \mathbf{Q} - \{0\}$; $x \circ y = |x \cdot y|$

c) $G = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0 \ \wedge \ |x| \ \leq 1\}$; $\circ$ je násobení čísel

d) $G = \{a + \sqrt{3} \cdot b \cdot i \mid a, b \in \mathbf{Q} \ \wedge \ (a^2 + b^2) \neq 0\}$; $\circ$ je násobení komplexních čísel,

[2.1.B12]. Na množině $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ definujeme operaci $+$ takto:

$$(C_i , C_j) + (C_r , C_s) = (C_i + C_r \ , \ C_j + C_s)$$

kde $+$ na pravé straně značí sčítání zbytkových tříd podle modulu 2.

Pak:

a) napište tabulku výše definované operace $+$

b) dokažte, že $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2, +)$ je komutativní grupa.

[2.1.B13]. Je dána pologrupa $(G, \circ)$. Rozhodněte, zda $(G, \circ)$ je grupa, resp. komutativní grupa, je-li:

a) $G = \mathbf{R}^{\langle 0,1 \rangle}$ (tj. množina všech zobrazení $\langle 0, 1\rangle \to \mathbf{R}$); $\circ$ je sčítání reálných funkcí, tj.
pro $f, g \in G$ je : $(f \circ g)(x) = f(x) + g(x)$, pro $\forall\, x \in \langle 0, 1\rangle$

b) $G = \mathbf{R}^{\langle 0,1 \rangle}$ (tj. množina všech zobrazení $\langle 0, 1\rangle \to \mathbf{R}$); $\circ$ je násobení reálných funkcí, tj.
pro $f, g \in G$ je : $(f \circ g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, pro $\forall\, x \in \langle 0, 1\rangle$

c) $G = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ (tj. množina všech zobrazení $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$); $\circ$ je skládání zobrazení

d) $G = \{f \mid f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je bijektivní zobrazení$\}$; $\circ$ je skládání zobrazení.

[2.1.B14]. Je dán grupoid $(G, \circ)$. Dokažte, že $(G, \circ)$ je nekomutativní grupa. Přitom:

a) $G = \mathbf{Z}$; $x \circ y = x + (-1)^x \cdot y$

b) $G = (\mathbf{R} - \{0\}) \times \mathbf{R}$; $(x, y) \circ (u, v) = (xu \ , \ xv + y)$

c) $G = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$; $(x, y, z) \circ (a, b, c) = (x + a \ , \ y + b \ , \ z + c + xb)$.

[2.1.B15]. Nechť $(G, \circ)$ je grupa; nechť $p \in G$ je pevný prvek. Na množině G definujeme operaci $*$ takto:

$$x * y = x \circ p \circ y \qquad \text{pro } \forall x, y \in G\,.$$

Rozhodněte, zda $(G, *)$ je grupa.

§ 2 : PODSTRUKTURY ALGEBRAICKÝCH STRUKTUR S JEDNOU OPERACÍ

[2.2.A1]. U.p. dvou disjunktních podgrupoidů v grupoidu:
a) $(\mathbf{N}, \cdot\,)$ b) $(\mathbf{N}, +\,)$.

[2.2.A2]. U.p. nekomutativního podgrupoidu v grupoidu $(\mathbf{Z}_{12}, \cdot)$.

[2.2.A3]. U.p. grupoidu $(G, \cdot)$ s jedničkou e a jeho podgrupoidu $(H, \cdot)$, který
a) nemá jedničku b) má jedničku, různou od e.

[2.2.A4]. U.p. grupy $(G, \cdot)$ a jejích dvou různých podgrup $(H_1, \cdot)$, $(H_2, \cdot)$ takových, že $(H_1 \cup H_2, \cdot)$
a) není podgrupou v $(G, \cdot)$ b) je podgrupou v $(G, \cdot)$.

[2.2.A5]. U.p. 17-ti prvkové podgrupy v grupě $(\mathbf{C} - \{0\}, \cdot)$.

[2.2.A6]. Určete všechny podgrupy grupy celých čísel $(\mathbf{Z}, +)$, které obsahují číslo 63.

[2.2.A7]. Popište (výčtem prvků) všechny netriviální podgrupy:
a) v grupě $(\mathbf{Z}_{12}, +)$ b) v grupě $(\mathbf{Z}_{13}, +)$.

[2.2.A8]. U.p. netriviální podgrupy v grupě $(\mathbf{Z}_{16}, +)$, která
a) neobsahuje prvek C_8 b) neobsahuje prvek C_2.

[2.2.A9]. U.p. přirozeného čísla m tak, aby grupa $(\mathbf{Z}_m, +)$ měla právě
a) 4 podgrupy b) 5 podgrup
c) k podgrup, kde k je libovolné pevné přirozené číslo.

[2.2.A10]. Nechť $(G, \cdot)$ je grupa a nechť H je neprázdná podmnožina množiny G. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná
pro to, aby $(H, \cdot)$ byla podgrupou grupy $(G, \cdot)$.

♣ ♣ ♣

[2.2.B1]. Je dán grupoid $(\mathbf{N}, +)$ a podmnožina $H \subseteq \mathbf{N}$. Rozhodněte, zda $(H, +)$ je podgrupoidem grupoidu $(\mathbf{N}, +)$, je-li
a) $H = \mathbf{N} - \{1, 2, 4, 5\}$
b) $H = \mathbf{N} - \{1, 2, 5, 6\}$
c) H je libovolná neprázdná konečná podmnožina v $\mathbf{N}$.

[2.2.B2]. Je dána grupa $(\mathbf{C} - \{0\}, \cdot)$ a dále neprázdná podmnožina $H \subseteq \mathbf{C} - \{0\}$. Rozhodněte, zda $(H, \cdot)$ je podgrupoidem, resp. podgrupou grupy $(\mathbf{C} - \{0\}, \cdot)$, je-li:
a) $H = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \geq 1\}$
b) $H = \{a + b \cdot i \in \mathbf{C} \mid b > 0\}$
c) $H = \{z \in \mathbf{C} - \{0\} \mid z \text{ je reálné číslo nebo } z \text{ je ryze imaginární číslo}\}$
d) $H = \{a + b \cdot \sqrt{5} \cdot i \mid a, b \in \mathbf{Q} \wedge (a^2 + b^2) \neq 0\}$.

[2.2.B3]. Na množině $G = \{a, b, c, d\}$ je dána operace $\cdot$ tabulkou

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	c	c	a
b	b	b	c	a
c	b	c	b	a
d	a	b	b	a

V grupoidu $(G, \cdot)$ pak nalezněte všechny podgrupoidy, resp. všechny podpologrupy, resp. všechny podgrupy.

[2.2.B4]. Nechť $(G, \cdot)$ je grupoid. Dokažte, že průnik libovolného systému podgrupoidů grupoidu $(G, \cdot)$ je buď prázdná množina nebo podgrupoid v $(G, \cdot)$.

[2.2.B5]. Dokažte, že
a) v grupoidu $(\mathbf{N}, +)$ neexistují žádné dva disjunktní podgrupoidy
b) v grupoidu $(\mathbf{N}, \cdot)$ existuje nekonečně mnoho po dvou disjunktních podgrupoidů.

[2.2.B6]. Nechť $(G, \cdot)$ je komutativní pologrupa s jedničkou e. Nechť dále je
$$H = \{x \in G \mid x \cdot x = x\}\ .$$
Dokažte, že pak $(H, \cdot)$ je podpologrupou pologrupy $(G, \cdot)$.

[2.2.B7]. Je dána grupa $(\mathbf{Q}, +)$ a neprázdná podmnožina $H \subseteq \mathbf{Q}$. Rozhodněte, zda $(H, +)$ je podgrupou grupy $(\mathbf{Q}, +)$, je-li:

a) $H = \left\{ \dfrac{a}{2^k} \mid a \in \mathbf{Z}\ ;\ k \geq 0 \text{ celé číslo} \right\}$

b) $H = \left\{ \dfrac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z} \text{ jsou nesoudělná } \wedge\ a \leq b \right\}$

c) p je pevné prvočíslo ; $H = \left\{ \dfrac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z} \text{ jsou nesoudělná } \wedge\ p \nmid b \right\}$

d) $H = \left\{ \dfrac{a}{b} \mid (a, b) = 1\ \wedge\ b \text{ není dělitelné čtvercem žádného prvočísla} \right\}$

[2.2.B8]. Je dána množina $G = \mathbf{R} - \{0\} \times \mathbf{R}$ s operací $\circ$ definovanou

$$(x, y) \circ (u, v) = (xu\ ,\ xv + y)\ ,\ \text{ pro } \forall\ (x, y), (u, v) \in \mathbf{R} - \{0\} \times \mathbf{R}$$

Pak $(G, \circ)$ je nekomutativní grupa (viz cvičení [2.1.B24] b)).

Rozhodněte, zda $(H, \circ)$ je podgrupa, resp. komutativní podgrupa grupy $(G, \circ)$, je-li:

a) $H = \{(1, 0), (-1, 0)\}$

b) $H = \{(1, b) \mid b \in \mathbf{R} \text{ libovolné }\}$

c) $H = \mathbf{Q} - \{0\} \times \mathbf{Q}$

d) $H = \mathbf{R} - \{0\} \times \mathbf{Q}$.

[2.2.B9]. Nechť $(G, \cdot)$ je grupa. Potom :

a) dokažte, že průnik libovolného neprázdného systému podgrup grupy $(G, \cdot)$ je opět podgrupou grupy $(G, \cdot)$

b) ukažte, že sjednocení dvou podgrup grupy $(G, \cdot)$ obecně není podgrupou grupy $(G, \cdot)$.

[2.2.B10]. Nechť $(G, \cdot)$ je grupa. Označme :

$$H = \{a \in G \mid a \cdot x = x \cdot a \quad \text{pro } \forall x \in G\}\ .$$

Dokažte, že pak :

a) $(H, \cdot)$ je podgrupou grupy $(G, \cdot)$

b) $H = G \iff$ grupa $(G, \cdot)$ je komutativní.

[2.2.B11]. Nechť $(G, \cdot)$ je komutativní grupa. Označme :

$$H = \{a \in G \mid a \cdot a = e\}$$

Dokažte, že :

a) $(H, \cdot)$ je podgrupou grupy $(G, \cdot)$

b) předpoklad komutativnosti grupy $(G, \cdot)$ nelze vypustit, tj. je-li $(G, \cdot)$ nekomutativní grupa, pak $(H, \cdot)$ nemusí být podgrupou v $(G, \cdot)$.

[2.2.B12]. Nechť $(G, \cdot)$ je komutativní grupa. Označme :

$$H = \{a \in G \mid \text{ existuje } n \in \mathbf{N} \text{ tak, že } a^n = e\}$$

(tj. H je množina těch prvků z G, jejichž některá přirozená mocnina je rovna jedničce grupy $(G, \cdot)$) .

Dokažte, že :

a) $(H, \cdot)$ je podgrupou grupy $(G, \cdot)$

b) předpoklad komutativnosti grupy $(G, \cdot)$ nelze vypustit, tj. je-li $(G, \cdot)$ nekomutativní grupa, pak $(H, \cdot)$ nemusí být podgrupou v $(G, \cdot)$.

[2.2.B13]. V množině zbytkových tříd $\mathbf{Z}_m$ uvažujme podmnožinu

$$H_k = \{C_{i \cdot k} \mid i = 0, 1, \ldots, \tfrac{m}{k} - 1\}$$

pro každé přirozené k, které dělí modul m. Dokažte, že :

$(H, +)$ je podgrupou v $(\mathbf{Z}_m, +) \iff \exists\, k \in \mathbf{N}$ tak, že $k \mid m\ \wedge\ H = H_k$.

[2.2.B14]. V dané grupě zbytkových tříd $(\mathbf{Z}_m, +)$ vypiště všechny podgrupy a nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathcal{H}, \subseteq)$, kde $\mathcal{H}$ značí množinu všech podgrup grupy $(\mathbf{Z}_m, +)$. Přitom:

a) $m = 3$ b) $m = 8$ c) $m = 12$ d) $m = 21$.

[2.2.B15]. Pro zadaný modul m dokažte pomocí tabulky operace násobení zbytkových tříd podle modulu m, že $(\mathbf{Z}_m - \{C_0\}, \cdot)$ je grupa.

Dále pak vypište všechny podgrupy této grupy a nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathcal{P}, \subseteq)$, kde $\mathcal{P}$ značí množinu všech podgrup dané grupy $(\mathbf{Z}_m - \{C_0\}, \cdot)$. Přitom:

a) $m = 5$

b) $m = 7$.

§ 3: HOMOMORFIZMY ALGEBRAICKÝCH STRUKTUR S JEDNOU OPERACÍ

[2.3.A1]. U. p. zobrazení $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Q}$, které

a) je homomorfizmem grupoidu $(\mathbf{N}, +)$ do grupoidu $(\mathbf{Q}, \cdot)$

b) není homomorfizmem grupoidu $(\mathbf{N}, +)$ do grupoidu $(\mathbf{Q}, \cdot)$.

[2.3.A2]. Jsou dány grupy $(\mathbf{Z}, +)$ a $(3{\cdot}\mathbf{Z}, +)$. U. p. dvou různých zobrazení $\varphi, \psi : \mathbf{Z} \longrightarrow 3{\cdot}\mathbf{Z}$, která jsou grupovými homomorfizmy.

[2.3.A3]. Je dána gupa $(\mathbf{Z}, +)$. U. p. zobrazení $\varphi : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$, které

a) je bijektivní, ale není homomorfizmem

b) je vnořením, ale není izomorfizmem.

[2.3.A4]. Rozhodněte (a zdůvodněte), zda následující grupoidy jsou izomorfní:

a) $(\mathbf{N}, +)$ a $(\mathbf{N}, \cdot)$ b) $(\mathbf{Z}_6, +)$ a $(\mathbf{Z}_6, \cdot)$.

[2.3.A5]. Rozhodněte (a zdůvodněte), zda následující grupy jsou izomorfní:

a) $(\mathbf{Z}, +)$ a $(\mathbf{R}, +)$ b) $(\mathbf{Z}, +)$ a $(4{\cdot}\mathbf{Z}, +)$

[2.3.A6]. U. p. dvou různých tříprvkových grup, které jsou izomorfní.

[2.3.A7]. Je dána grupa $(\mathbf{Z}, +)$. U. p. homomorfizmu $\varphi : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ tak, že obraz $\operatorname{Im} \varphi = \mathbf{N}$.

[2.3.A8]. Jsou dány grupy $(\mathbf{Z}, +)$ a $(\mathbf{Z}_2, +)$. U. p. homomorfizmu $\varphi : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_2$ tak, že jádro $\operatorname{Ker} \varphi$ je rovno množině všech sudých celých čísel.

[2.3.A9]. Je dána grupa $(\mathbf{Z}, +)$. U.p. homomorfizmu $\varphi : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ tak, že jádro $\operatorname{Ker} \varphi = \{-1, 0, 1\}$.

[2.3.A10]. U. p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná

pro to, aby zobrazení φ grupy $(G, \cdot)$ do grupy $(H, \circ)$ bylo homomorfizmem.

♣ ♣ ♣

[2.3.B1]. Nechť A je neprázdná množina a nechť $\varphi : 2^A \longrightarrow 2^A$ je zobrazení grupoidu $(2^A, \cap)$ do grupoidu$(2^A, \cup)$. Rozhodněte, zda φ je homomorfizmus, je−li pro každé $X \in 2^A$:

a) $\varphi(X) = A$

b) $\varphi(X) = X$

c) $\varphi(X) = A - X$

[2.3.B2]. Jsou dány pologrupy $(\mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N}, +,)$, kde operace $+$ je definována jako sčítání po složkách a $(\mathbf{N}, \cdot)$. Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ je homomorfizmus, resp. vnoření, resp. izomorfizmus, je−li:

a) $\varphi((a,b,c)) = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$

b) $\varphi((a,b,c)) = 2 \cdot 3^{a+b} \cdot 5^c$

c) $\varphi((a,b,c)) = 2^a \cdot 3^b \cdot 12^c$

[2.3.B3]. Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ je homomorfizmus, resp. vnoření, resp. izomorfizmus grupy $(\mathbf{Z}, +)$, je−li pro každé $x \in \mathbf{Z}$:

a) $\varphi(x) = 3{\cdot}x$

b) $\varphi(x) = x + 3$

c) $\varphi(x) = x^3$

[2.3.B4]. Je dána grupa $(\mathbf{Q} - \{0\}, \cdot)$. Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbf{Q} - \{0\} \longrightarrow \mathbf{Q} - \{0\}$ je homomorfizmus, resp. vnoření, resp. izomorfizmus, položíme−li pro $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q} - \{0\}$:

a) $\varphi(\frac{p}{q}) = \frac{q}{p}$

b) $\varphi(\frac{p}{q}) = \frac{p^2}{q^2}$

c) $\varphi(\frac{p}{q}) = \frac{p^2 + q^2}{p \cdot q}$

[2.3.B5]. Jsou dány grupy $(\mathbf{Z}, +)$, $(\mathbf{Z}_2, +)$, $(\mathbf{Z}_3, +)$. Rozhodněte, zda zobrazení φ je homomorfizmus, je−li

a) $\varphi : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_2$, $\varphi(a) = C_r$, kde r je zbytek po dělení $|a|$ číslem 2

b) $\varphi : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_3$, $\varphi(a) = C_r$, kde r je zbytek po dělení $|a|$ číslem 3.

[2.3.B6]. Jsou dány grupy $(\mathbf{Z}, +)$, $(\mathbf{C} - \{0\}, \cdot)$ a je definováno zobrazení $\varphi : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{C} - \{0\}$, takto:

$$\varphi(a) = i^{a}, \qquad \text{pro každé } a \in \mathbf{Z}.$$

Dokažte, že zobrazení φ je homomorfizmus a nalezněte jeho jádro $\operatorname{Ker}\varphi$ a obraz $\operatorname{Im}\varphi$.

[2.3.B7]. Jsou dány grupy $(\mathbf{C}, +)$ a $(\mathbf{R}, +)$. Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{R}$ je homomorfizmus a v případě, že tomu tak je, pak nalezněte jeho jádro $\operatorname{Ker}\varphi$ a obraz $\operatorname{Im}\varphi$. Přitom zobrazení φ je definováno pro každé $a + bi \in \mathbf{C}$ takto:

a) $\varphi(a + bi) = a + b$

b) $\varphi(a + bi) = a$.

[2.3.B8]. Jsou dány grupy $(\mathbf{R}, +)$, $(\mathbf{R}^{+}, \cdot)$ a je definováno zobrazení $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^{+}$, takto:

$$\varphi(x) = e^{x}, \qquad \text{pro každé } x \in \mathbf{R}.$$

Potom:

a) dokažte, že φ je homomorfizmus
b) rozhodněte, zda φ je vnoření, resp. izomorfizmus
c) nalezněte jádro $\operatorname{Ker}\varphi$ a obraz $\operatorname{Im}\varphi$.

[2.3.B9]. Zobrazení $\varphi : \mathbf{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}^{+}$ je definováno takto:

$$\varphi(z) = |z|, \qquad \text{pro každé } z \in \mathbf{C} - \{0\}.$$

Dokažte, že φ je homomorfizmus grupy $(\mathbf{C} - \{0\}, \cdot)$ do grupy $(\mathbf{R}^{+}, \cdot)$ a nalezněte jeho jádro $\operatorname{Ker}\varphi$ a obraz $\operatorname{Im}\varphi$.

[2.3.B10]. Nechť $p \in \mathbf{N}$ je pevné přirozené číslo. Definujeme zobrazení $\varphi : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_m$ takto: pro každé $a \in \mathbf{Z}$ je

$$\varphi(a) = C_r \qquad \text{kde } r \text{ je zbytek po dělení čísla } p{\cdot}a \text{ číslem } m.$$

Pak

1. dokažte, že φ je homomorfizmus grupy $(\mathbf{Z}, +)$ do grupy $(\mathbf{Z}_m, +)$
2. nalezněte jádro $\operatorname{Ker}\varphi$ pro následující hodnoty m a p:
   a) $m = 6$, $p = 5$
   b) $m = 6$, $p = 4$
   c) $m = 6$, $p = 3$
   d) pro obecné hodnoty m a p.

[2.3.B11]. Jsou dány grupy zbytkových tříd $(\mathbf{Z}_{12}, +)$, $(\mathbf{Z}_4, +)$ a je definováno zobrazení $\varphi : \mathbf{Z}_{12} \longrightarrow \mathbf{Z}_4$, takto: pro každé $C_i \in \mathbf{Z}_{12}$ je

$$\varphi(C_i) = C_r, \quad \text{kde } r \text{ je zbytek po dělení čísla } i \text{ číslem } 4.$$

Dokažte, že zobrazení φ je homomorfizmus a nalezněte jeho jádro $\operatorname{Ker}\varphi$ a obraz $\operatorname{Im}\varphi$.

[2.3.B12]. Dokažte, že grupy $(\mathbf{R}, +)$ a $(\mathbf{R}^{+}, \cdot)$ jsou izomorfní, ale grupy $(\mathbf{Q}, +)$ a $(\mathbf{Q}^{+}, \cdot)$ nejsou izomorfní.

[2.3.B13]. Dokažte, že dané dvě grupy nejsou izomorfní

a) $(\mathbf{Z}_6, +)$ a $(S_3, \circ)$,

kde S_3 značí množinu všech permutací na 3 – prvkové množině a $\circ$ značí skládání permutací (tj. skládání zobrazení)

b) $(\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_2, \oplus)$ *a* $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2, \oplus)$,

kde $\oplus$ značí sčítání po složkách podle příslušného modulu.

[2.3.B14]. Nechť $(G, \cdot)$ je komutativní grupa a nechť $\varphi : G \longrightarrow G$ je zobrazení definované:

$$\varphi(a) = a^2, \quad \text{pro každé } a \in G.$$

Potom:

a) dokažte, že φ je homomorfizmus

b) uveďte příklad grupy $(G, \cdot)$ pro kterou je zobrazení φ izomorfizmus

b) uveďte příklad grupy $(G, \cdot)$ pro kterou zobrazení φ není izomorfizmus.

[2.3.B15]. Nechť $(G, \cdot)$ je grupa a nechť $\varphi : G \longrightarrow G$ je zobrazení definované:

$$\varphi(a) = a^{-1}, \quad \text{pro každé } a \in G.$$

Dokažte, že φ je homomorfizmus $\Longleftrightarrow$ grupa $(G, \cdot)$ je komutativní.

§4: ALGEBRAICKÉ STRUKTURY SE DVĚMA OPERACEMI

[2.4.A1]. U.p. okruhu, ve kterém neplatí omezené zákony o krácení.

[2.4.A2]. U.p. netriviálního okruhu, který není oborem integrity.

[2.4.A3]. U.p. konečného oboru integrity, který není tělesem.

[2.4.A4]. U.p. nenulového prvku v okruhu $(\mathbf{Z}_{17}, +, \cdot)$, k němuž neexistuje prvek inverzní (vzhledem k operaci $\cdot$).

[2.4.A5]. U.p. tělesa, které není číselným tělesem.

[2.4.A6]. U.p. číselného tělesa, které neobsahuje číslo 13.

[2.4.A7]. U.p. číselného tělesa, které neobsahuje číslo $\sqrt{13}$.

[2.4.A8]. U.p. číselného tělesa, různého od $(\mathbf{C}, +, \cdot)$, které obsahuje číslo $(1+i)$.

[2.4.A9]. U.p. číselného tělesa $(T, +, \cdot)$ tak, že platí: $\mathbf{Q} \subset T \subset \mathbf{R}$.

[2.4.A10]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná

pro to, aby okruh $(R, +, \cdot)$ byl oborem integrity.

♣ ♣ ♣

[2.4.B1]. Rozhodněte, zda množina M s operacemi obyčejného sčítání čísel a obyčejného násobení čísel je okruhem, je-li:

a) $M = \{\frac{a}{2^k} \mid a \in \mathbf{Z}\,,\ k \geq 0 \,\text{celé}\}$

b) $M = \{a + b\sqrt[3]{5} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$

c) $M = \{a + b\frac{1+\sqrt{5}}{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$

d) $M = \{a + b\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$.

[2.4.B2]. Rozhodněte, zda $(M, \oplus, \circ)$ je okruh, resp. obor integrity, resp. těleso. Přitom množina M a operace $\oplus, \circ$ jsou zadány takto:

a) $M = \mathbf{Z}$; $x \oplus y = x + y + 3$, $x \circ y = -3$

b) $M = \mathbf{Z}$; $x \oplus y = x + y - 1$, $x \circ y = x \cdot y - 1$

c) $M = \mathbf{Z}$; $x \oplus y = x + y - 1$, $x \circ y = x + y - x \cdot y$

d) $M = \mathbf{Q}$; $x \oplus y = x + y$, $x \circ y = y$

e) $M = \mathbf{Q}$; $x \oplus y = x + y + 1$, $x \circ y = x + y + x \cdot y$

f) $M = \mathbf{Q}$; $x \oplus y = x + y - 1$, $x \circ y = x + y + x \cdot y$.

[2.4.B3]. Uvažme podmnožinu G množiny všech komplexních čísel :

$$G = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$$

(množina G se nazývá *množina Gaussových celých čísel*), s operacemi obyčejného sčítání komplexních čísel a obyčejného násobení komplexních čísel. Dokažte, že

a) $(G, +, \cdot)$ je obor integrity, který není tělesem

b) v $(G, +, \cdot)$ existují inverzní prvky (vzhledem k operaci$\cdot$) právě jenom k číslům $1, -1, i, -i$.

Návod: při důkazu b) přejděte k absolutním hodnotám z komplexních čísel a využijte pravidel pro počítání s nimi.

[2.4.B4]. Na množině $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$, resp. na množině $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ definujeme operace $+$ a $\cdot$ takto :

$$(x, y) + (u, v) = (x + u\ ,\ y + v)$$
$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu + 2yv\ ,\ xv + yu)\,.$$

Dokažte, že pak :

a) $(\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}, +, \cdot)$ je těleso

b) $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}, +, \cdot)$ je komutativní okruh, který má dělitele nuly (tzn. není tělesem).

[2.4.B5]. Nechť $\mathbf{R}[x]$ značí množinu všech polynomů (tj. mnohočlenů) neurčité x, s reálnými koeficienty. Dokažte, že množina $\mathbf{R}[x]$ s operacemi obvyčejného sčítání polynomů a obyčejného násobení polynomů je oborem integrity, který není tělesem.

[2.4.B6]. Nechť $(T, +, \cdot)$ je libovolné, pevné těleso. Nechť

$$M = \{f : \mathbf{Z} \to T \mid f(z) \neq 0 \text{ pouze pro konečně mnoho } z \in \mathbf{Z}\}.$$

Dále, pro $f, g \in M$ definujeme $f \oplus g : \mathbf{Z} \to T$, resp. $f \circ g : \mathbf{Z} \to T$ takto: pro $\forall z \in \mathbf{Z}$ položíme

$$(f \oplus g)(z) = f(z) + g(z)$$

$$(f \circ g)(z) = \sum_{a+b=z} f(a) \cdot g(b)$$

Dokažte, že pak $(M, \oplus, \circ)$ je oborem integrity.

[2.4.B7]. Nechť $(R, +, \cdot)$ je netriviální okruh. Označme:

$$J = \{x \in R \mid \text{k prvku } x \text{ existuje prvek inverzní (vzhledem k } \cdot)\} \ .$$

Dokažte, že potom :

a) množina J neobsahuje žádné dělitele nuly okruhu $(R, +, \cdot)$

b) $(J, \cdot)$ je grupa (tj. je to podgrupa multiplikativní pologrupy $(R, \cdot)$).

[2.4.B8]. Nechť M označuje množinu všech nekonečných posloupností reálných čísel. Na množině M definujeme operaci $\oplus$ jako "sčítání po složkách" a operaci $\circ$ jako "násobení po složkách", tj.,:

$$(a_1, a_2, \dots) \oplus (b_1, b_2, \dots) = (a_1 + b_1 \ , \ a_2 + b_2 \ , \dots)$$

$$(a_1, a_2, \dots) \circ (b_1, b_2, \dots) = (a_1 \cdot b_1 \ , \ a_2 \cdot b_2 \ , \dots)$$

Potom:

a) dokažte, že $(M, \oplus, \circ)$ je komutativní okruh s jedničkou

b) ukažte, že v $(M, \oplus, \circ)$ existují dělitelé nuly a popište je.

[2.4.B9]. Dokažte, že v okruhu zbytkových tříd $(\mathbf{Z}_m, +, \cdot)$ jsou následující výroky ekvivalentní:

1. k prvku $C_i \in \mathbf{Z}_m$ existuje prvek inverzní
2. $C_i \neq C_0 \ \wedge \ C_i$ není dělitelem nuly v $(\mathbf{Z}_m, +, \cdot)$
3. čísla $i\,, m$ jsou nesoudělná.

[2.4.B10]. V okruhu zbytkových tříd $(\mathbf{Z}_m, +, \cdot)$ nalezněte všechny prvky, k nimž existuje prvek inverzní (vzhledem k $\cdot$). Přitom:

a) $m = 9$ b) $m = 10$ c) $m = 11$ d) $m = 12$.

[2.4.B11]. Dokažte, že v každém okruhu zbytkových tříd $(\mathbf{Z}_m, +, \cdot)$, kde $m \geq 3$, platí:

a) k prvku C_{m-1} existuje vždy prvek inverzní, a sice sám prvek C_{m-1}

b) je-li m liché číslo, pak k prvku C_2 existuje inverzní prvek, kterým je prostřední člen posloupnosti $\quad C_1, C_2, \dots, C_{m-1}, C_0$

c) jestliže m je tvaru: $m = 3k + 2$, pak k prvku C_3 existuje prvek inverzní, a sice prvek $C_{\frac{m+1}{3}}$

[2.4.B12]. Nechť $m \geq 2$; dokažte, že pak v okruhu $(\mathbf{Z}_m, +, \cdot)$ pro každé $C_i \neq C_0$ platí : $\ C_i^2 = C_{m-i}^2$.

[2.4.B13]. Dokažte, že jedinými číselnými tělesy obsahujícími všechna reálná čísla jsou pouze tělesa $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{C}, +, \cdot)$.

[2.4.B14]. Rozhodněte, zda $(T, +, \cdot)$ je číselné těleso, jestliže $+$, resp. $\cdot$ značí obyčejné sčítání, resp. násobení čísel a je-li:

a) $T = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$

b) $T = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$

c) $T = \left\{\dfrac{a}{2^k} \mid a \in \mathbf{Z}\ , \ k \geq 0 \text{ celé}\right\}$

d) $T = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \mid a, b, c \in \mathbf{Q}\}$

e) $T = \{a + b\sqrt[3]{4} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$

f) $T = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbf{Q}\}$.

[2.4.B15]. Rozhodněte, zda $(T, +, \cdot)$ je číselné těleso, jestliže $+$, resp. $\cdot$ značí obyčejné sčítání, resp. násobení čísel a je-li:

a) $T = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$

b) $T = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$

c) $T = \{a + bi \mid a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{Q}\}$

d) $T = \{b \cdot i \mid b \in \mathbf{Q}\}$

e) $T = \{z \in \mathbf{C} \mid \ |z| = 1\}$

f) $T = \{a + b\sqrt{5}i \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$.

III. VÝSLEDKY A NÁVODY K ŘEŠENÍ

KAPITOLA 1:

OPAKOVÁNÍ A DOPLNĚNÍ STŘEDOŠKOLSKÉ LÁTKY

§ 1: ZÁKLADNÍ LOGICKÉ POJMY

[1.1.A2]. Neexistuje. **[1.1.A4].** Neexistuje. **[1.1.A6].** Neexistuje. **[1.1.A7].** Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[1.1.B1]. a) není výrok, b) je výrok, nepravdivý, c) není výrok, d) není výrok.

[1.1.B2]. a) $A \implies \neg C$, b) $(\neg A \wedge B) \implies C$,
c) $\neg B \implies (\neg A \vee \neg C)$, d) $B \iff (\neg A \wedge \neg C)$.

[1.1.B3]. A je nepravdivý výrok, B je pravdivý výrok, C je nepravdivý výrok (zjistí se výpočtem s využitím kongruencí podle modulu 3, resp. modulu 5, resp. modulu 7).
Dále: a) je pravdivý výrok, b) je nepravdivý výrok, c) je pravdivý výrok, d) je pravdivý výrok.

[1.1.B4]. Návod: sestrojte tabulky pravdivostních hodnot pro oba výroky.

[1.1.B5]. a) implikace, b) konjunkce.

[1.1.B6]. a) pravdivý výrok, jeho obměna: "Jestliže trojúhelník není rovnoramenný, pak není rovnostranný"
b) nepravdivý výrok, jeho obměna: "Jestliže dvě přímky nejsou navzájem kolmé, pak jsou rovnoběžné".

[1.1.B7]. Návod: důkazy veďte tak, že vždy sestrojíte tabulku pravdivostních hodnot.

[1.1.B8]. Obor pravdivosti dané výrokové formy je:
a) $(-2, \frac{4}{3})$ b) $\emptyset$ c) $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ d) $\mathbf{R}$.

[1.1.B9]. a) "Nenapsal to ani Petr ani Pavel",
b) "Dnes nebude pršet nebo zítra bude svítit slunce",
c) "Budu se učit a zkoušku z matematiky neudělám",
d) "Budu mít volno a nepůjdu ani do kina ani do divadla".

[1.1.B10]. a) "Existuje kulička ležící na tomto stole, která je modrá",
b) "Žádné celé číslo není sudé nebo alespoň jedno celé číslo je liché",
c) "Existují kladná reálná čísla r, s tak, že $r \geq r \cdot s$",
d) "Pro všechna celá čísla $t_1, \dots, t_n$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, platí, že $t_1 + \cdots + t_n \neq 0$",
e) "Existují přirozená čísla $a_1, \dots, a_n$, kde $n \geq 5$ a alespoň jedno z těchto čísel je větší než 5, tak, že $a_1 + \cdots + a_n \leq 10$",
f) "Pro všechna ryze imaginární čísla z_1, z_2, z_3 platí, že součin $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$ není číslo reálné".

[1.1.B14]. Návod: uvědomte si, že v 1. kroku matematické indukce je nutné dokázat daný vztah pro $n = 1$ a $n = 2$ (proč?).

[1.1.B15]. Návod: použijte vztah, plynoucí z definice:

$$u_{n+s} = u_{n+(s-1)} + u_{n+(s-2)} \qquad (\text{kde } s \geq 3).$$

V 1. kroku matematické indukce se pak tvrzení ověřuje pro $s = 1, 2$.

§ 2: ZÁKLADNÍ MNOŽINOVÉ POJMY

[1.2.A5]. Neexistuje. **[1.2.A7].** Neexistuje. **[1.2.A9].** a), d), f), i), j) jsou pravdivé, resp. b), c), e), g), h) jsou nepravdivé.

♣ ♣ ♣

[1.2.B3]. Návod: a) důkaz "$\subseteq$" veďte nepřímo, tzn. dokazujte implikaci

$$x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \implies x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n).$$

[1.2.B4]. Návod: část b) dokazujte sporem, tzn. předpokládejte, že $x \in \bigcap_{p \in J} A_p$. Uvědomte si přitom, že prvočísel je nekonečně mnoho.
Při důkazu c) sestrojte číslo, které leží v $\bigcap_{p \in J} A_p$, kde $J = \{p_1, \dots, p_k\}$ je konečná množina prvočísel.

[1.2.B8]. Návod: využijte toho, že pro $0 \leq i \leq n$ existuje v množině A právě $\binom{n}{i}$ i-prvkových podmnožin. Použijte binomickou větu.

[1.2.B9]. a) $X = \{a, d\}$, $X = \{a, c, d\}$, b) neexistuje.

[1.2.B11]. $A\times B = \{(1,3),(1,7),(2,3),(2,7),(3,3),(3,7)\}$,

$B\times A = \{(3,1),(3,2),(3,3),(7,1),(7,2),(7,3)\}$,

$B\times B = \{(3,3),(3,7),(7,3),(7,7)\}$,

$B\times 2^B = \{(3,\emptyset),(3,\{3\}),(3,\{7\}),(3,B),(7,\emptyset),(7,\{3\}),(7,\{7\}),(7,B)\}$,

$B\times C = \{(3,x) \mid x \in \mathbf{R}\} \cup \{(7,x) \mid x \in \mathbf{R}\}$, což lze také zapsat ve tvaru $B\times C = \{(3,x),(7,x) \mid x \in \mathbf{R}\}$.

§ 3 : ZÁKLADNÍ ČÍSELNÉ OBORY

[1.3.B1]. a) $\dfrac{5}{7}$ b) $-\dfrac{3}{4}$ c) $\dfrac{4}{3}$ d) $-\dfrac{3}{5}$.

[1.3.B4]. a) $\dfrac{6+\sqrt{5}}{5} + \dfrac{8-2\sqrt{5}}{5}\, i$ b) $-\dfrac{48}{25}\, i$.

[1.3.B5]. a) vnitřek kruhu o středu $S = [-2\,,\,3\,]$ a poloměru $r = 3$
b) přímka o rovnici $y = x$
c) osa úsečky $A = [\,-2\,,\,0\,]$ $B = [\,0\,,\,1\,]$, tj. přímka $y = -2x - \frac{3}{2}$
d) kružnice o středu $S = [\,0\,,\,0\,]$ a poloměru $r = 2$.

[1.3.B6]. a) $z = \dfrac{3}{2} - 2i$ b) $z = 0$ nebo $z = 2$.

[1.3.B7]. Pro $p = 0$: prázdná množina;
pro $p = 1$: imaginární osa, tj. přímka o rovnici $x = 0$;
pro $p > 0 \wedge p \neq 1$: kružnice o středu $S = \left[\frac{1+p^2}{1-p^2}\,,\,0\right]$ a poloměru $r = \left|\frac{2p}{1-p^2}\right|$.

[1.3.B8]. Absolutní hodnota a argument komplexního čísla z jsou:
a) $|z| = 2$, $\arg z = \frac{5}{6}\pi$ b) $|z| = 4$, $\arg z = \frac{5}{3}\pi$
c) $|z| = 1$, $\arg z = \alpha + \frac{\pi}{2}$ d) $|z| = \frac{1}{2}$, $\arg z = \alpha + \beta$.

[1.3.B9]. a) $-\frac{1}{2}\cdot(1 + i\sqrt{3})$ b) -27 .

[1.3.B10]. Všechna n tvaru: $n = 4k$, pro libovolné $k \geq 0$ celé.

[1.3.B11]. a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
b) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$, $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha$.
Návod: komplexní číslo $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2$, resp. $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3$ se rozepíše jednak podle Moivreovy věty a jednak podle binomické věty. Porovnáním reálných a imaginárních části obou vyjádření pak dostaneme požadované vzorce.

[1.3.B12]. a) $\pm\, i$, $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$
b) $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $\pm\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

[1.3.B13]. a) $-\sqrt[3]{5}$, $\frac{\sqrt[3]{5}}{2}(1 + i\sqrt{3})$, $\frac{\sqrt[3]{5}}{2}(1 - i\sqrt{3})$
b) $\pm(2 + 2i)$, $\pm(2 - 2i)$.

[1.3.B14]. Označíme-li n-tou odmocninu ze zadaného komplexního čísla c symbolem z , pak je:
a) $|z| = 2$, $\arg z = \frac{\pi}{15} + k\cdot\frac{2}{5}\pi$, kde $k = 0,1,2,3,4$
b) $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \frac{\pi}{24} + \frac{3}{8}\alpha + k\cdot\frac{\pi}{4}$, kde $k = 0,1,2,3,4,5,6,7$
c) $|z| = 2\sqrt[3]{2}$, $\arg z = \frac{7}{36}\pi + k\cdot\frac{\pi}{3}$, kde $k = 0,1,2,3,4,5$
d) $|z| = 2$, $\arg z = \frac{7}{3}\alpha + k\cdot\frac{2}{3}\pi$, kde $k = 0,1,2$.

[1.3.B15]. a) 1 , $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) 1 , i , -1 , $-i$
c) ± 1 , $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) ± 1 , $\pm i$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$
a nakreslení příslušných obrázků.

§ 4 : ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI CELÝCH ČÍSEL

[1.4.A2]. Neexistuje. **[1.4.A4].** Neexistuje. **[1.4.A7].** Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[1.4.B1]. a) $q=0$, $r=0$, b) $q=-1$, $r=2$, c) $q=-4$, $r=3$, d) $q=-5$, $r=8$, e) $q=n-1$, $r=2$, f) $q=n^2-n$, $r=n-1$.
[1.4.B2]. Návod: při důkazu b) použijte výsledku získaného v a).
[1.4.B3]. Zbytek může nabývat pouze hodnot: $0,1,4,9$.

[1.4.B4]. a) ano, b) ne, c) ne, d) ano.

[1.4.B5]. a) 10 (neboť výpočtem dostaneme, že: $5^{40} \equiv 1\,(\bmod 13)$, resp. $7^{40} \equiv 9\,(\bmod 13)$)

b) 12 (neboť výpočtem postupně dostaneme, že: $2^{50} \equiv 4\,(\bmod 17)$, resp. $3^{50} \equiv 9\,(\bmod 17)$, resp. $4^{50} \equiv -1\,(\bmod 17)$).

[1.4.B6]. a) 07 (neboť výpočtem dostaneme, že: $7^{9^9} \equiv 7\,(\bmod 100)$,)

b) 36 (neboť výpočtem dostaneme, že: $14^{14^{14}} \equiv 36\,(\bmod 100)$,)

[1.4.B8]. Návod: důkaz veďte sporem, tzn. předpokládejte, že:

$$(p-1)! \equiv -1\,(\bmod p) \quad \wedge \quad p \text{ je složené číslo}$$

tj. $p = a{\cdot}b$, kde $1 < a, b < p$. Vyjde, že $a \mid 1$, což je spor.

[1.4.B9]. a) platí b) neplatí c) neplatí d) neplatí.

[1.3.B10]. a) neplatí b) platí.

[1.4.B12]. Návod: při důkazech bez použití matematické indukce:
a) použijte vzorec pro $a^n - b^n$
b) uvědomte si, že $n^3 - n = n{\cdot}(n{+}1){\cdot}(n{-}1)$ je součinem tří po sobě jdoucích celých čísel.

[1.4.B13]. Každé $n \geq 3$.
Návod: pro $n \geq 3$ upravujte:

$$10^n + 8 = 8 \cdot (10^{n-3} \cdot 125 + 1) = 8 \cdot ((10^{n-3} - 1){\cdot}125 + 126)$$

a využijte toho, že $9 \,|\, 126$, resp. že $9 \,|\, (10^{n-3} - 1)$, což vyplývá z předchozího cvičení [1.4.B12] a).

[1.4.B14]. Návod: a) v důkazu využijte toho, že lze psát:

$$12^{2n+1} = 144{\cdot}12^{2n-1} = (11 + 133){\cdot}12^{2n-1}.$$

b) v důkazu využijte toho, že pro $n \geq 4$ lze psát:

$$2^n + 1 = 2^n + 8 - 7 = 8 \cdot (2^{n-3} + 1) - 7.$$

V 1. kroku matematické indukce ověřujeme tvrzení pro $n = 1, 2, 3$.

§ 5: ZOBRAZENÍ

[1.5.A2]. b) neexistuje. **[1.5.A5].** a) $k = 2, 3, 4$, b) $k \geq 3$. Návod k a): využijte výsledku příkladu [1.1.B12] e), tj. je-li A $n-$prvková množina, kde $n \geq 5$, potom platí, že $2^n > n^2$.

♣ ♣ ♣

[1.5.B1]. Zadaný předpis f
a) neurčuje zobrazení b) určuje zobrazení c) neurčuje zobrazení.

[1.5.B2]. Po nakreslení obrázků dostanete:
a) celkem 8 zobrazení, z toho 6 surjektivních, žádné injektivní, žádné bijektivní,
b) celkem 9 zobrazení, z toho 6 injektivních, žádné surjektivní, žádné bijektivní.

[1.5.B3]. a) $A^B = \{f\}$, přičemž zobrazení f je definováno:

$$f(x) = a, \quad f(y) = a, \quad f(z) = a;$$

$B^A = \{f, g, h\}$, kde zobrazení f, resp. g, resp. h jsou definována:

$$f(a) = x, \qquad \text{resp. } g(a) = y, \qquad \text{resp. } h(a) = z$$

b) $A^B = \{f, g, h, k\}$, přičemž tato zobrazení jsou definována:

$$f(x) = x, \quad f(y) = x \qquad g(x) = y, \quad g(y) = y$$
$$h(x) = x, \quad h(y) = y \qquad k(x) = y, \quad k(y) = x$$

$B^A = A^B$.

[1.5.B5]. Zadané zobrazení f:
a) je injektivní, není surjektivní, b) je injektivní, není surjektivní,
c) není injektivní, je surjektivní, d) je injektivní, je surjektivní.

[1.5.B6]. Zadané zobrazení f:
a) není injektivní, je surjektivní, b) je injektivní, je surjektivní,
c) není injektivní, není surjektivní, d) není injektivní, není surjektivní,
e) je injektivní, není surjektivní, f) není injektivní, je surjektivní.

[1.5.B7]. Zadané zobrazení f:
a) není injektivní, není surjektivní, b) je injektivní, není surjektivní,
c) není injektivní, není surjektivní, d) je injektivní, je surjektivní,
e) je injektivní, je surjektivní, f) není injektivní, je surjektivní.

[1.5.B8]. a) pro $s \neq n$ žádné bijektivní zobrazení, resp. pro $s = n$ celkem $n!$ bijektivních zobrazení,

b) pro $s < n$ žádné injektivní zobrazení, resp. pro $s \geq n$ celkem $\dfrac{s!}{(s-n)!}$ injektivních zobrazení.

[1.5.B9]. Návod: a) při důkazu " $\Longrightarrow$ " zkonstruujeme hledané zobrazení $g : B \to A$ např. takto: jestliže prvek $b \in B$ má při zobrazení f vzor (uvědomte si, že musí být jediný), pak tento vzor označíme symbolem b^*.

Dále, nechť a_0 značí libovolný pevný prvek z A. Zobrazení $g : B \to A$ pak definujeme:

$$g(b) = \begin{cases} b^* & \text{má-li prvek } b \text{ při zobrazení } f \text{ vzor} \\ a_0 & \text{nemá-li prvek } b \text{ při zobrazení } f \text{ vzor} \end{cases}$$

Při důkazu " $\Longrightarrow$ " v b) postupujeme obdobně, tzn. pro každé $b \in B$ označíme symbolem b^* jeden (pevný) vzor prvku b při zobrazení f. Pak zobrazení $h : B \to A$ definujeme:

$$h(b) = b^*\,, \quad \text{pro každé } b \in B\,.$$

[1.5.B12]. $(f \circ g)(x) = 6x + 1$, $\qquad (g \circ f)(x) = 6x - \frac{19}{3}$,

$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{1}{6}(x - 1)$, $\qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x + 4)$,

$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{18}(3x + 19)$, $g^{-1}(x) = \frac{1}{6}(3x - 5)$.

[1.5.B14]. Návod: při b) ukažte, že z podmínky zadání plyne:

$$f(f(f(-x))) = f(f(-f(x)))$$

a použijte dvakrát injektivnost zobrazení f.

Při c) dokazujte nejprve "$\Longleftarrow$" (s využitím b)), a pak "$\Longrightarrow$" (s využitím již dokázaných vlastností, že: $f(0) = 0$ a f je injektivní).

§ 6: RELACE

[1.6.A1]. a) 2^{24}, b) 1, c) 2^9, d) 2^{81}. **[1.6.A7].** Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[1.6.B2]. a) relaci ϱ zapíšeme např. takto:

$\varrho = \{(x, y) \mid (x = 3 \wedge y \in \mathbf{N} \text{ libovolné}) \vee (x \geq 50, \text{ sudé } \wedge y \text{ liché})\}$.

Při b), c), d) postupujeme podobně.

[1.6.B3]. Relace $\sigma \circ \varrho$ a $\varrho \circ \sigma$ jsou tvaru:

$\sigma \circ \varrho = \{(x, y) \mid y = -3x^2 - 1 \vee y = 9x^4 + 6x^2 - 2, \text{ pro } \forall\, x \in \mathbf{Z}\}$,

$\varrho \circ \sigma = \{(a, b) \mid b = 3a^2 + 1 \vee b = 3a^4 - 18a^2 + 28, \text{ pro } \forall\, a \in \mathbf{N}\}$.

[1.6.B6]. a) celkem 16 relací, b) celkem 13 relací,

c) 3 relace: $\{(a, b), (b, a)\}$, $\{(a, b), (b, a), (a, a)\}$, $\{(a, b), (b, a), (b, b)\}$.

d) všechny relace z c) a navíc relace $\{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b)\}$.

[1.6.B7]. Daných relací je celkem:

a) $2^{n(n-1)}$, $\qquad$ b) $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $\qquad$ c) $2^n \cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$,

d) $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$, $\qquad$ e) $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$, $\qquad$ f) $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

[1.6.B8]. Relace ϱ je:

a) symetrická, tranzitivní

b) symetrická

c) reflexivní, antisymetrická

[1.6.B9]. Relace ϱ je:

a) antisymetrická

b) reflexivní, symetrická, tranzitivní

c) antisymetrická, tranzitivní

[1.6.B10]. Relace ϱ je:

a) symetrická,

b) symetrická, resp. je-li A jednoprvková, pak je též antisymetrická a tranzitivní,

c) antisymetrická, tranzitivní, resp. je-li A jednoprvková, pak je též reflexivní a úplná,

[1.6.B11]. Relace ϱ_4 neexistuje.

§ 7: USPOŘÁDANÉ MNOŽINY

[1.7.A3]. Neexistuje. **[1.7.A7].** Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[1.7.B1]. Hasseovský diagram uspořádané množiny (M, ϱ) je tvaru:

[1.7.B2]. Relace ϱ je zadána takto:

a) $\varrho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, a), (b, d), (c, a), (c, d), (a, d)\}$,

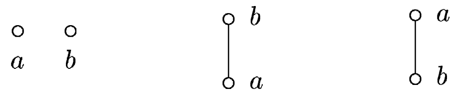
b) $\varrho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$,

c) $\varrho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, d), (c, d)\}$,

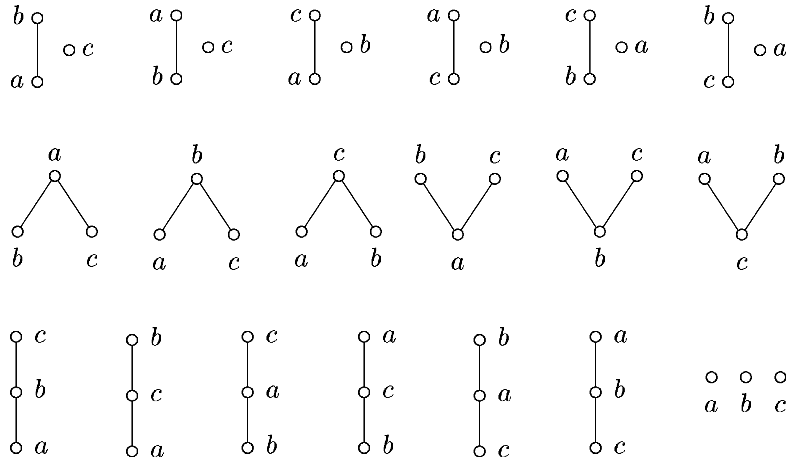
d) $\varrho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (c, a), (c, d), (c, b), (a, d), (a, b), (d, b)\}$.

[1.7.B3]. Na dané množině M lze definovat :

a) 3 relace uspořádání, hasseovské diagramy jsou tvaru :

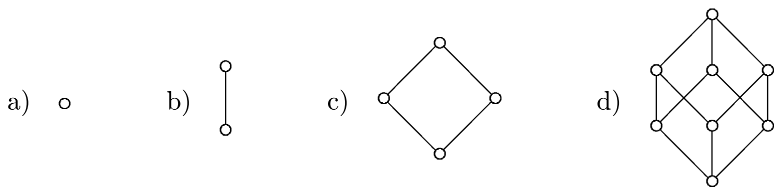
a) 

b) 19 relací uspořádání, hasseovské diagramy jsou tvaru :

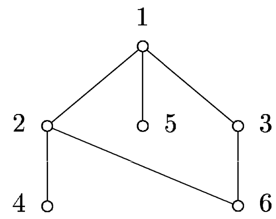


Poznámka : uvědomte si, že se ve všech případech jedná o různé relace uspořádání na množině M , a tedy o různé uspořádané množiny, i když některé z uvedených hasseovských diagramů vypadají na první pohled "stejně" .

[1.7.B4]. Hasseovský diagram uspořádané množiny $(2^A, \subseteq)$ je tvaru (doplňte si v jednotlivých diagramech sami popis prvků množiny 2^A) :



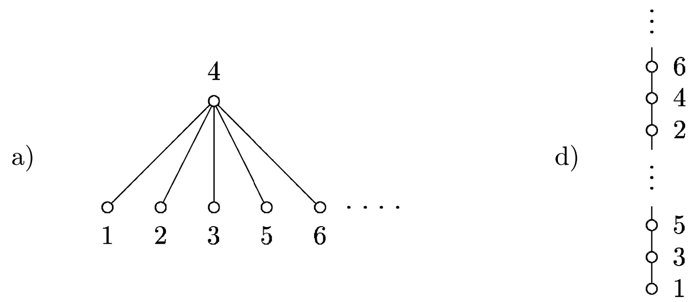
[1.7.B5]. Hasseovský diagram uspořádané množiny (M, ϱ) je tvaru :



[1.7.B6]. Pro množinu s relací $(\mathbf{N}, \varrho)$ platí :

a) je uspořádaná množina, není lineárně uspořádaná množina, není svaz ,
b) není uspořádaná množina ,
c) není uspořádaná množina ,
d) je lineárně uspořádaná množina, je svaz, není úplný svaz .

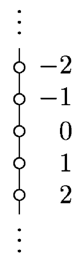
Hasseovské diagramy u uspořádaných množin je možno schematicky znázornit takto :

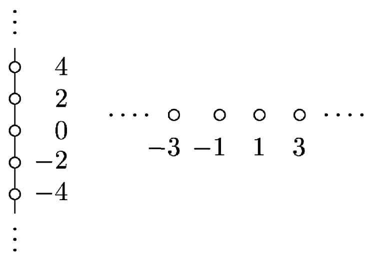


[1.7.B7]. Pro množinu s relací $(\mathbf{Z}, \varrho)$ platí :

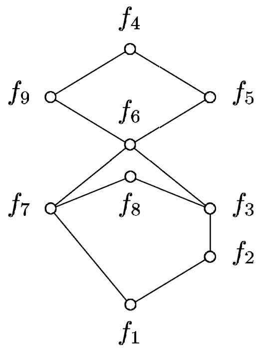
a) není uspořádaná množina ,
b) je lineárně uspořádaná množina, je svaz, není úplný svaz ,
c) není uspořádaná množina ,
d) je uspořádaná množina, není lineárně uspořádaná množina, není svaz .

Hasseovské diagramy u uspořádaných množin je možno schematicky znázornit takto :

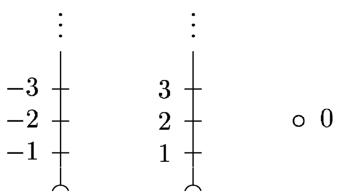
b) 

d) 

[1.7.B8]. Hasseovský diagram uspořádané množiny (M, ϱ) je tvaru:



[1.7.B9]. Hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathbf{R}, \varrho)$ je možno schematicky načrtnout takto:



[1.7.B11]. a) pro uspořádané množiny ze cvičení [1.7.B2] platí:

[1.7.B2] a): nejmenší prvek nemá, minimálními prvky jsou b, c, největším a zároveň jediným maximálním prvkem je d,

[1.7.B2] b): nejmenší ani největší prvek nemá, minimálními a zároveň maximálními prvky jsou a, b, c, d,

[1.7.B2] c): největší ani nejmenší prvek nemá, minimálními prvky jsou a, b, c, maximálními prvky jsou a, d,

[1.7.B2] d): nejmenším a zároveň jediným minimálním prvkem je c, největším a zároveň jediným maximálním prvkem je b;

b) pro uspořádané množiny ze cvičení [1.7.B6] platí:

[1.7.B6] a): nemá nejmenší prvek, minimálními prvky jsou všechna přirozená čísla různá od 4, největším a jediným maximálním prvkem je číslo 4,

[1.7.B6] d): nemá největší ani maximální prvek; nejmenším a zároveň jediným minimálním prvkem je číslo 1;

c) pro uspořádané množiny ze cvičení [1.7.B7] platí:

[1.7.B7] b): nemá minimální, maximální, nejmenší ani největší prvek,

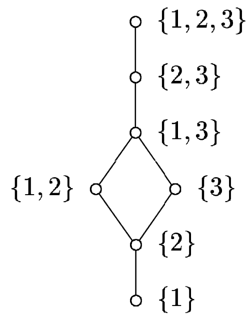
[1.7.B7] d): nemá nejmenší ani největší prvek, minimálními prvky jsou všechna lichá celá čísla a maximálními prvky jsou rovněž všechna lichá celá čísla.

d) uspořádaná množina ze cvičení [1.7.B8] nemá největší prvek, maximálními prvky jsou f_4 a f_8, nejmenším a zároveň jediným minimálním prvkem je f_1.

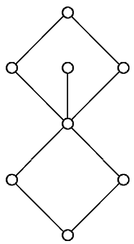
[1.7.B12]. Návod: důkazy veďte sporem.

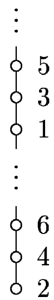
[1.7.B13]. b) neplatí.

[1.7.B14]. b) hasseovský diagram uspořádané množiny (M, ϱ) je tvaru:



[1.7.B15]. Hasseovské diagramy uspořádaných množin z c) a d) jsou tvaru: (při c) si sami doplňte popis jednotlivých prvků)

c) 

d) 

§ 8: EKVIVALENCE A ROZKLADY

[1.8.A1]. Jediná relace, a to relace rovnosti. **[1.8.A4].** Neexistuje. **[1.8.A7].** b) neexistuje. **[1.8.A8].** Pro $m = 1, 2, 7, 14$.

♣ ♣ ♣

[1.8.B1]. Relace ϱ na množině M:

a) není ekvivalencí

b) je ekvivalencí, přičemž rozklad $M/\varrho = \{\{a,b,d\},\{c\}\}$.

[1.8.B2]. Na množině M lze utvořit celkem:

a) 2 rozklady

b) 5 rozkladů

c) 15 rozkladů.

[1.8.B3]. Tabulka relace $\sim_{\mathcal{R}}$ je tvaru:

a)

	u	v	x	y	z
u	1	0	0	0	0
v	0	1	0	1	0
x	0	0	1	0	0
y	0	1	0	1	0
z	0	0	0	0	1

b)

	u	v	x	y	z
u	1	0	0	1	0
v	0	1	1	0	1
x	0	1	1	0	1
y	1	0	0	1	0
z	0	1	1	0	1

[1.8.B4]. b) Rozklad M/ϱ (tj. rozklad na množině M, příslušný ekvivalenci ϱ) je tvaru:

$\{\{1,10\},\{2,11,20\},\{3,12\},\{4,13\},\{5,14\},\ldots,\{8,17\},\{9,18\},\{19\}\}$.

[1.8.B5]. Daná relace ϱ:

a) není ekvivalencí, b) je ekvivalencí

c) není ekvivalencí, d) je ekvivalencí.

[1.8.B6]. Rozklad $\mathbf{Z}/\varrho$ (tj. rozklad na množině $\mathbf{Z}$, příslušný ekvivalenci ϱ) je tvaru:

a) $\mathbf{Z}/\varrho = \mathbf{Z}_4$, tj. množina zbytkových tříd podle modulu 4,

b) $\mathbf{Z}/\varrho = \{C_0, C_1 \cup C_6, C_2 \cup C_5, C_3 \cup C_4\}$, kde $C_i \in \mathbf{Z}_7$,

c) $\mathbf{Z}/\varrho = \{\{-1+k, -1-k\} \mid k \geq 0 \text{ celé}\}$,

d) $\mathbf{Z}/\varrho = \{S, L\}$, kde S, resp. L značí množinu všech sudých, resp. všech lichých celých čísel.

[1.8.B7]. Rozklad $\mathbf{R}\times\mathbf{R}/\varrho$ lze nakreslit takto:

a) všechny přímky rovnoběžné s osou y,

b) navzájem rovnoběžné přímky tvaru $y = 2x + k$, pro $\forall k \in \mathbf{R}$,

c) počátek a všechny kružnice se středem v počátku,

d) bod $S[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ a všechny kružnice se středem v bodě S.

[1.8.B8]. Zadaný systém podmnožin $\mathcal{M}$:

a) je rozkladem na $\mathbf{R}$, přičemž relace $\sim_{\mathcal{M}}$ je definována:

$$x \sim_{\mathcal{M}} y \iff [x] = [y],$$

kde $[x]$, resp. $[y]$ značí celou část čísla x, resp. y,

b) není rozkladem na $\mathbf{R}$,

c) je rozkladem na $\mathbf{R}$, přičemž relace $\sim_{\mathcal{M}}$ je definována:

$$x \sim_{\mathcal{M}} y \iff (x = y = 0) \vee (x, y > 0) \vee (x, y < 0),$$

d) je rozkladem na $\mathbf{R}$, přičemž platí: $\sim_{\mathcal{M}} = \mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

[1.8.B14]. Rozklad (na množině A) příslušný zobrazení f je tvaru:

a) $\mathcal{M} = \{\{a,c,d\},\{b,e\}\}$,

b) $\mathcal{M} = \{\langle k, k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\}$,

c) $\mathcal{M} = \{\langle -k+1, -k+2) \cup \langle k-1, k) \mid k \in \mathbf{N}\}$,

d) $\mathcal{M} = \{\{\emptyset\}, \{X \subseteq \mathbf{N} \mid X \neq \emptyset \text{ konečná}\}, \{X \subseteq \mathbf{N} \mid X \text{ nekonečná}\}\}$.

[1.8.B15]. b) např. $\mathcal{R} = \{\{x\} \mid x \in M\}$,

KAPITOLA 2:

ZÁKLADNÍ ALGEBRAICKÉ STRUKTURY

§ 1: ALGEBRAICKÉ STRUKTURY S JEDNOU OPERACÍ

[2.1.A1]. Celkem $3^9 = 19.683$ různými způsoby. **[2.1.A6].** Neexistuje. **[2.1.A9].** Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[2.1.B1]. a) ne b) ano c) ne d) ne.

[2.1.B2]. a) není komutativní, je asociativní, nemá neutrální prvek

b) je komutativní, není asociativní, prvek b je neutrálním prvkem.

[2.1.B3]. a) není komutativní, je asociativní, nemá neutrální prvek,

b) je komutativní, není asociativní, neutrálním prvkem je 0,

c) je komutativní, není asociativní, nemá neutrální prvek,

d) je komutativní, není asociativní, nemá neutrální prvek.

[2.1.B4]. a) celkem 5 součinů tvaru:

$a\cdot(b\cdot(c\cdot d))$, $a\cdot((b\cdot c)\cdot d)$, $(a\cdot b)\cdot(c\cdot d)$, $(a\cdot(b\cdot c))\cdot d$, $((a\cdot b)\cdot c)\cdot d$.

[2.1.B6]. a) neutrální prvek je 0; inverzním prvkem k 0 (resp. -2) je 0 (resp. -2), k ostatním prvkům inverzní prvky neexistují,

b) neutrální prvek je 3; inverzním prvkem k 3 je 3, resp. k libovolnému číslu $x \neq 3$ jsou inverzními prvky všechna celá čísla s výjimkou 3.

[2.1.B7]. a) $e = 0$; resp. $0^{-1} = 0$, $2^{-1} = 2$,

b) $e = 0$; resp. pro $a \neq 1$ je $a^{-1} = \dfrac{a}{a-1}$,

c) $e = C_1$; resp. $C_1^{-1} = C_1$, $C_5^{-1} = C_5$,

d) $e = C_1$; resp. $C_1^{-1} = C_1$, $C_2^{-1} = C_4$, $C_3^{-1} = C_5$, $C_4^{-1} = C_2$, $C_5^{-1} = C_3$, $C_6^{-1} = C_6$.

[2.1.B8]. Zákony o dělení, resp. zákony o krácení:

a) platí, resp. platí, b) neplatí, resp. neplatí,

c) neplatí, resp. platí, d) neplatí, resp. neplatí.

[2.1.B9]. a) tabulka operace je symetrická podle hlavní diagonály,

b) v tabulce existuje řádek, v němž se opakuje vodorovné záhlaví a sloupec, v němž se opakuje svislé záhlaví,

c) v každém řádku a sloupci tabulky se vystřídají všechny prvky,

d) totéž jako v c).

[2.1.B10]. a) $3^5 = 243$ způsobů, b) 9 způsobů, c) 9 způsobů,

d) 1 způsob (Návod: v tomto případě, po doplnění tabulky plynoucím z komutativity, vyšetřujte nejprve součiny $z\cdot(x\cdot x)$ a $(z\cdot x)\cdot x$.),

e) 1 způsob, f) žádný způsob.

[2.1.B11]. a) ano, b) ne, c) ne, d) ano.

[2.1.B12]. a) tabulka operace + má tvar:

$+$	(C_0,C_0)	(C_0,C_1)	(C_1,C_0)	(C_1,C_1)
(C_0,C_0)	(C_0,C_0)	(C_0,C_1)	(C_1,C_0)	(C_1,C_1)
(C_0,C_1)	(C_0,C_1)	(C_0,C_0)	(C_1,C_1)	(C_1,C_0)
(C_1,C_0)	(C_1,C_0)	(C_1,C_1)	(C_0,C_0)	(C_0,C_1)
(C_1,C_1)	(C_1,C_1)	(C_1,C_0)	(C_0,C_1)	(C_0,C_0)

[2.1.B13]. Daná pologrupa $(G,\circ)$

a) je komutativní grupou, b) není grupou,

c) není grupou, d) je nekomutativní grupou.

[2.1.B15]. $(G,*)$ je grupa.

§ 2: PODSTRUKTURY ALGEBRAICKÝCH STRUKTUR S JEDNOU OPERACÍ

[2.2.A1]. b) neexistuje. **[2.2.A2].** Neexistuje. **[2.2.A7].** b) neexistují. **[2.2.A8].** a) neexistuje.

♣ ♣ ♣

[2.2.B1]. a) ano, b) ne, c) ne.

[2.2.B2]. Platí, že $(H,\cdot)$:

a) je podgrupoid

b) není podgrupoid

c) je podgrupa

d) je podgrupa.

[2.2.B3]. V grupoidu $(G, \cdot)$ existuje celkem:

6 podgrupoidů, a to:

$$(G, \cdot)\,,\ \ (\{a,b,c\}, \cdot)\,,\ \ (\{a,d\}, \cdot)\,,\ \ (\{b,c\}, \cdot)\,,\ \ (\{a\}, \cdot)\,,\ \ (\{b\}, \cdot)\,,$$

4 podpologrupy, a to: $(\{a,d\}, \cdot)\,,\ (\{b,c\}, \cdot)\,,\ (\{a\}, \cdot)\,,\ (\{b\}, \cdot)\,,$

3 podgrupy, a to: $(\{b,c\}, \cdot)\,,\ (\{a\}, \cdot)\,,\ (\{b\}, \cdot)\,,$

[2.2.B5]. Návod: a) v $(\mathbf{N}, +)$ uvažte dva libovolné podgrupoidy $(H_1, +)$, $(H_2, +)$ a dva pevné prvky $x \in H_1$, $y \in H_2$. Vyšetřujte pak prvek $x \cdot y$. Jednou jej vyjádřete jako součet $(y + y + \cdots + y)$ (celkem $x-$krát) a podruhé jako součet $(x + x + \cdots + x)$ (celkem $y-$krát),

b) například pro libovolné prvočíslo p označte

$$H_p = \{p^{\,\alpha} \mid \alpha \in \mathbf{N}\}$$

a vyšetřujte pak podgrupoidy $(H_p, \cdot)$ pro všechna prvočísla p.

[2.2.B7]. a) ano, b) ne, c) ano, d) ano.

[2.2.B8]. Platí, že $(H, \circ)$

a) je komutativní podgrupa

b) je komutativní podgrupa

c) je nekomutativní podgrupa

d) není podgrupa.

[2.2.B11]. Návod: při b) uvažujte např. nekomutativní grupu všech bijektivních zobrazení $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ s operací skládání zobrazení.

[2.2.B12]. Návod: při b) uvažujte např. nekomutativní grupu všech bijektivních zobrazení $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ s operací skládání zobrazení.

[2.2.B13]. Návod: při důkazu "$\Longrightarrow$" rozlište případy $H = \{C_0\}$ a $H \neq \{C_0\}$. Ve druhém případě lze zřejmě množinu H zapsat ve tvaru:

$$H = \{C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_s}\}\ ,\quad \text{kde}\ \ 0 = i_1 < i_2 < \cdots < i_s\,.$$

Pak položte: $i_2 = k$ a dokazujte, že: $k \mid m \quad \wedge \quad H = H_k$.

Při důkazu "$\Longleftarrow$" postupujte běžným způsobem, tzn. využijte např. Větu 2.3., část 2, kapitoly II.

[2.2.B14]. a) 2 podgrupy: $(\mathbf{Z}_3, +)\,,\ (\{C_0\}, +)\,,$

b) 4 podgrupy:

$(\mathbf{Z}_8, +)\,,\ (\{C_0, C_2, C_4, C_6\}, +)\,,\ (\{C_0, C_4\}, +)\,,\ (\{C_0\}, +)\,,$

c) 6 podgrup:

$(\mathbf{Z}_{12}, +)\,,\ (\{C_0, C_2, C_4, C_6, C_8, C_{10}\}, +)\,,\ (\{C_0, C_3, C_6, C_9\}, +)\,,$

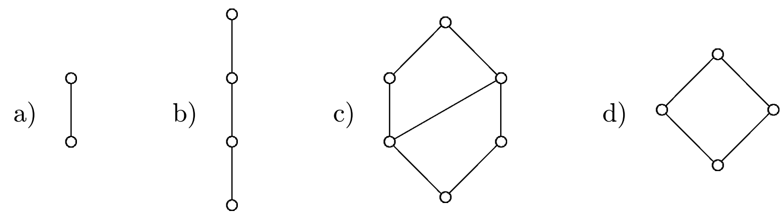
$(\{C_0, C_4, C_8\}, +)\,,\ (\{C_0, C_6\}, +)\,,\ (\{C_0\}, +)\,,$

d) 4 podgrupy:

$(\mathbf{Z}_{21}, +)\,,\ (\{C_0, C_3, C_6, C_9, C_{12}, C_{15}, C_{18}\}, +)\,,\ (\{C_0, C_7, C_{14}\}, +)\,,$

$(\{C_0\}, +)\,.$

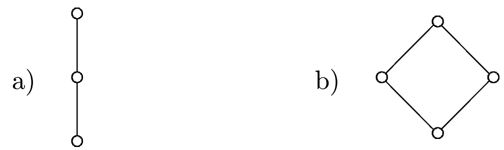
Hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathcal{H}, \subseteq)$ je tvaru (doplňte si označení jednotlivých prvků !):



[2.2.B15]. a) 3 podgrupy: $(\mathbf{Z}_5 - \{C_0\}, \cdot)\,,\ (\{C_1, C_4\}, \cdot)\,,\ (\{C_1\}, \cdot)\,,$

b) 4 podgrupy: $(\mathbf{Z}_7 - \{C_0\}, \cdot)$, $(\{C_1, C_2, C_4\}, \cdot)$, $(\{C_1, C_6\}, \cdot)$, $(\{C_1\}, \cdot)$.

Hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathcal{P}, \subseteq)$ je tvaru (doplňte si označení jednotlivých prvků !):



§ 3: HOMOMORFIZMY ALGEBRAICKÝCH STRUKTUR S JEDNOU OPERACÍ

[2.3.A4]. a) ne, b) ne. **[2.3.A5].** a) ne, b) ano. **[2.3.A7].** Neexistuje.

[2.3.A9]. Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[2.3.B1]. a) φ je homomorfizmus, b) φ není homomorfizmus, c) φ je homomorfizmus (viz příklad [1.2.B1 d]).

[2.3.B2]. a) φ je homomorfizmus, je vnoření, není izomorfizmus,
b) φ není homomorfizmus, c) φ je homomorfizmus, není vnoření.

[2.3.B3]. a) φ je homomorfizmus, je vnoření, je izomorfizmus,
b) φ není homomorfizmus, c) φ není homomorfizmus.

[2.3.B4]. a) φ je homomorfizmus, je vnoření, je izomorfizmus,
b) φ je homomorfizmus, není vnoření, c) φ není homomorfizmus.

[2.3.B5]. a) φ je homomorfizmus, b) φ není homomorfizmus.

[2.3.B6]. $\operatorname{Ker}\varphi = 4\cdot\mathbf{Z} = \{4k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{1, i, -1, -i\}$.

[2.3.B7]. a) φ není homomorfizmus,
b) φ je homomorfizmus, $\operatorname{Ker}\varphi = \{b\cdot i \mid b \in \mathbf{R}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbf{R}$.

[2.3.B8]. b) φ je izomorfizmus c) $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbf{R}^+$.

[2.3.B9]. Jádro sestává ze všech čísel, která leží na jednotkové kružnici, tzn. $\operatorname{Ker}\varphi = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ a obraz $\operatorname{Im}\varphi = \mathbf{R}^+$.

[2.3.B10]. 2. a) $Ker\,\varphi = 6\cdot\mathbf{Z}$,
b) $Ker\,\varphi = 3\cdot\mathbf{Z}$,
c) $Ker\,\varphi = 2\cdot\mathbf{Z}$,
d) $Ker\,\varphi = \frac{m}{d}\cdot\mathbf{Z}$, kde d je největší společný dělitel čísel m, p.

[2.3.B11]. $Ker\,\varphi = \{C_0, C_4, C_8\}$, $Im\,\varphi = \mathbf{Z}_4$.

[2.3.B12]. Například zobrazení $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^+$, definované: $\varphi(x) = e^x$ je izomorfizmus.

Druhá část se dokáže sporem. Je-li $\varphi : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}^+$ izomorfizmus, pak existuje $a \in \mathbf{Q}$ tak, že $\varphi(a) = 2$, odkud úpravou dostaneme

$$2 = \varphi(a) = \varphi(\tfrac{a}{2} + \tfrac{a}{2}) = \varphi(\tfrac{a}{2}) \cdot \varphi(\tfrac{a}{2}) = \left[\varphi(\tfrac{a}{2})\right]^2 \implies \sqrt{2} = \varphi(\tfrac{a}{2}) \in \mathbf{Q},$$

což je spor.

[2.3.B13]. a) stačí si všimnout toho, že jedna grupa je komutativní a druhá nekomutativní

b) při libovolném homomorfizmu φ se prvky (C_2, C_0) a (C_0, C_0) vždy zobrazí na (C_0, C_0, C_0), (sami podrobně rozepište). Zobrazení φ pak není injektivní a nemůže se tedy jednat o izomorfizmus.

[2.3.B14]. a) například grupa $(\mathbf{R}^+, \cdot)$, b) například grupa $(\mathbf{Q}^+, \cdot)$.

§ 4: ALGEBRAICKÉ STRUKTURY SE DVĚMA OPERACEMI

[2.4.A3]. Neexistuje. **[2.4.A4].** Neexistuje. **[2.4.A6].** Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[2.4.B1]. a) ano, b) ne, c) ano, d) ano.

[2.4.B2]. Platí, že $(M, \oplus, \circ)$
a) je okruh, b) není okruh, c) je obor integrity,
d) není okruh, e) je těleso, f) není okruh.

[2.4.B4]. Návod: rozepsáním se ukáže, že v obou případech dostaneme komutativní okruh s jedničkou $(1, 0)$, přičemž nulou je $(0, 0)$.

Při hledání dělitelů nuly si uvědomte, že je-li

$$(a, b) \neq (0, 0) \quad \wedge \quad (a, b) \cdot (x, y) = (0, 0),$$

pak pro $a, b \in \mathbf{Q}$ je vždy $2b^2 - a^2 \neq 0$ (proč?), kdežto pro $a, b \in \mathbf{R}$ může být $2b^2 - a^2 = 0$. Toho pak využijte při výpočtu (x, y).

[2.4.B8]. b) děliteli nuly v okruhu $(M, \oplus, \circ)$ jsou všechny nenulové prvky tohoto okruhu,

[2.4.B9]. Návod: dokazujte nejprve implikaci " (i) $\Longrightarrow$ (ii) ", potom implikaci , " (ii) $\Longrightarrow$ (iii) " a nakonec implikaci " (iii) $\Longrightarrow$ (i) ".

Přitom důkaz " (ii) $\Longrightarrow$ (iii) " veďte sporem, resp.

při důkazu " (iii) $\Longrightarrow$ (i) " využijte toho, že pokud jsou čísla i, m nesoudělná, pak existují čísla $u, v \in \mathbf{Z}$ tak, že $i \cdot u + m \cdot v = 1$. Je-li $j \equiv u (\operatorname{mod} m) \;\wedge\; 0 \leq j < m$, dostanete pak, že: $C_j = C_i^{-1}$.

[2.4.B10]. Inverzní prvek existuje k těmto prvkům:
a) $C_1, C_2, C_4, C_5, C_7, C_8$, b) C_1, C_3, C_7, C_9
c) ke všem nenulovým prvkům, d) C_1, C_5, C_7, C_{11}.

[2.4.B13]. Návod: vyjděte z předpokladu, že $(T, +, \cdot)$ je číselné těleso takové, že $\mathbf{R} \subset T \subseteq \mathbf{C}$ a dokazujte, že pak $T = \mathbf{C}$. Přitom nejprve ukažte, že číslo $i \in T$.

[2.4.B14] a) ano, b) ne, c) ne (uvědomte si, že zde je $T \subset \mathbf{Q}$),
d) ne, e) ne, f) ano, .

[2.4.B15] a) ne, b) ano, c) ne, d) ne, e) ne, f) ano.

LITERATURA

Sbírky příkladů

[1] HORÁK, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I.* Skriptum MU, Brno, 2006.

[2] KLÍMA, O.: *Sbírka příkladů ke cvičení ze Základů matematiky.* Učební text MU, Brno, 2011.
Dostupné na:
http://www.math.muni.cz/~klima/ZakladyM/sbirka.html

[3] VELEBIL, J.: *Diskrétní matematika, sbírka řešených příkladů.* Učební text ČVUT, Praha, 2007.
Dostupné na:
ftp://math.feld.cvut.cz/pub/velebil/y01dma/dma-sbirka.pdf

Závěrečné práce studentů MU

[4] HEJSEK, M.: *Základy matematiky, sbírka příkladů.* Bakalářská práce, PřF MU, 2007.
Dostupné na:
http://is.muni.cz/th/106473/prif_b/bc.pdf

[5] RŮŽIČKA, J.: *Teorie čísel, sbírka příkladů.* Diplomová práce, PřF MU, 2006.
Dostupné na:
http://is.muni.cz/th/42653/fi_m/DIPLOMKA.pdf

O B S A H