

# Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

## Nehomogenní rovnice

Petr Liška

Masarykova univerzita

6.12.2024

# Nehomogenní lineární diferenciální rovnice

## Definice

Uvažme opět rovnici

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

potom o rovnici

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (2)$$

mluvíme jako o *asociované homogenní rovnici k rovnici (1)*.

## Lemma

*Nechť  $y_1, y_2$  jsou dvě řešení rovnice (1), pak jejich rozdíl  $y_0 = y_1 - y_2$  je řešením příslušné asociované homogenní rovnice (2).*

## Další vlastnosti řešení

### Věta

*Mějme jedno partikulární řešení  $y_p$  nehomogenní rovnice (1) a obecné řešení  $y_o$  asociované homogenní rovnice (2). Pak obecné řešení rovnice (1) je*

$$y = y_o + y_p.$$

### Věta (Princip superpozice)

*Je-li  $y_1$  řešení rovnice  $L[y] = f_1$  a  $y_2$  je řešení rovnice  $L[y] = f_2$ , pak  $y_1 + y_2$  je řešení rovnice  $L[y] = f_1 + f_2$ .*

## Metoda neurčitých koeficientů

- Je-li  $f(x) = P_n(x)$ , pak partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p = x^K Q_n(x),$$

kde  $Q_n(x)$  je polynom stejného stupně s neurčitými koeficienty a  $K$  je násobnost čísla 0 jako kořene charakteristické rovnice.

- Je-li  $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ , pak partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p = x^K e^{\alpha x} Q_n(x),$$

kde  $Q_n(x)$  je polynom stejného stupně s neurčitými koeficienty a  $K$  je násobnost čísla  $\alpha$  jako kořene charakteristické rovnice.

- Je-li  $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \sin \beta x + Q_m(x) \cos \beta x)$ , pak partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p = x^K e^{\alpha x} (U_r \sin \beta x + V_r \cos \beta x),$$

kde  $r = \max\{m, n\}$ ,  $Q_m(x), V_m(x)$  jsou polynomy stupně  $r$  s neurčitými koeficienty a  $K$  je násobnost čísla  $\alpha + i\beta$  jako kořene charakteristické rovnice.

# Metoda variace konstant

Je-li

$$y_0 = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

obecné řešení asociované homogenní rovnice (2), pak partikulární řešení rovnice (1) je tvaru

$$y_p = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

kde  $c_1(x)$  a  $c_2(x)$  jsou funkce, které jsou řešením soustavy

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0,$$

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = r(x).$$