Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

Nehomogenní rovnice

Petr Liška

Masarykova univerzita

6.12.2024

Nehomogenní lineární diferenciální rovnice

Definice

Uvažme opět rovnici

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \tag{1}$$

potom o rovnici

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

mluvíme jako o *asociované (přidružené)* homogenní rovnici.

Lemma

Nechť y_1, y_2 *jsou dvě řešení rovnice* (1), *pak jejich rozdíl* $y_0 = y_1 - y_2$ *je řešením příslušné asociované homogenní rovnice* (2).

Další vlastnosti řešení

Věta

Mějme jedno partikulární řešení y_p *nehomogenní rovnice* (1) *a obecné řešení* y_o *asociované homogenní rovnice* (2). *Pak obecné řešení rovnice* (1) *je*

$$y = y_o + y_p.$$

Věta (Princip superpozice)

Je-li y_1 *řešení rovnice* $L[y] = f_1$ *a* y_2 *je řešení rovnice* $L[y] = f_2$, *pak* $y_1 + y_2$ *je řešení rovnice* $L[y] = f_1 + f_2$.

Metoda neurčitých koeficientů

- Je-li $r(x) = P_n(x)$, pak partikulární řešení hledáme ve tvaru
$$y_p = x^K Q_n(x),$$
kde $Q_n(x)$ je polynom stejného stupně s neurčitými koeficienty a K je násobnost čísla 0 jako kořene charakteristické rovnice.
- Je-li $r(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} P_n(x)$, pak partikulární řešení hledáme ve tvaru
$$y_p = x^K \mathrm{e}^{\alpha x} Q_n(x),$$
kde $Q_n(x)$ je polynom stejného stupně s neurčitými koeficienty a K je násobnost čísla α jako kořene charakteristické rovnice.
- Je-li $r(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_n(x)\sin\beta x + S_r(x)\cos\beta x\right)$, pak partikulární řešení hledáme ve tvaru
$$y_p = x^K \mathrm{e}^{\alpha x}\left(Q_m \sin\beta x + V_m \cos\beta x\right),$$
kde $m = \max\{n, r\}$, $Q_m(x), V_m(x)$ jsou polynomy stupně m s neurčitými koeficienty a K je násobnost čísla $\alpha + i\beta$ jako kořene charakteristické rovnice.

Metoda variace konstant

Je-li

$$y_0 = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

obecné řešení asociované homogenní rovnice (2), pak partikulární řešení rovnice (1) je tvaru

$$y_p = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x),$$

kde $c_1(x)$ a $c_2(x)$ jsou funkce, které jsou řešením soustavy

$$\begin{aligned} c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) &= 0, \\ c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) &= r(x). \end{aligned}$$