Banachova věta

Jeden z vrcholů našeho snažení

Petr Liška

Masarykova univerzita

04.10.2024

Úplný metrický prostor

Definice

Metrický prostor (P, ϱ) se nazývá úplný, jestliže v něm každá cauchyovská posloupnost má limitu, tj. každá cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Věta

Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor a $A \subseteq P$ je uzavřená množina. Pak A s metrikou, která je indukovaná metrikou ϱ, je úplný metrický prostor.

Kompaktní prostor a množina

Definice

Metrický prostor (P, ϱ) se nazývá *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti jeho bodů lze vybrat konvergentní podposloupnost. Množina $A \subseteq P$ se nazývá *kompaktní*, jestliže A s metrikou indukovanou metrikou ϱ je kompaktní prostor, tj. z každé posloupnosti bodů množiny A lze vybrat podposloupnost mající v A limitu.

Věta

Je-li metrický prostor (P, ϱ) kompaktní, pak je úplný.

Věta

i) *Nechť A je kompaktní množina v metrickém prostoru (P, ϱ). Pak A je uzavřená a ohraničená.*

ii) *Nechť A je podmnožina v $\mathbb{E}^n$. Množina A je kompaktní, právě když je uzavřená a ohraničená.*

Spojitá zobrazení

Definice

Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory, F je zobrazení z P do Q. Řekneme, že toto zobrazení je *spojité v bodě* x_0, jestliže ke každému okolí V bodu $F(x_0)$ v Q existuje okolí U bodu x_0 v P takové, že $F(x) \in V$ pro každé $x \in U$. Řekneme, že F je spojité na P, je-li spojité v každém bodě P.

Věta

Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory. Zobrazení $F \colon P \to Q$ je spojité v bodě $x_0 \in P$, právě tehdy když pro každou posloupnost bodů v P, pro niž $x_n \overset{\varrho}{\to} x_0$, platí $F(x_n) \overset{\sigma}{\to} F(x_0)$.

Věta

Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory a $F \colon P \to Q$ je spojité a $A \subseteq P$ je kompaktní. Pak $F(A)$ je kompaktní v Q.

Kontrakce

Definice

Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory, $F \colon P \to Q$. Řekneme, že zobrazení F je *lipschitzovské*, jestliže existuje nezáporná reálná konstanta L taková, že

$$\sigma\left(F(x), F(y)\right) \leq L\varrho(x, y) \quad \text{pro každé}\, x, y \in P.$$

Je-li $L < 1$, pak říkáme, že F je *kontrakce*.

Věta

Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory, $F \colon P \to Q$ je lipschitzovské zobrazení. Pak F je spojité.

Pevný bod a Banachova věta

Definice

Nechť $F\colon P \to P$ je zobrazení. Bod $x_0 \in P$ se nazývá *pevný bod* zobrazení F, jestliže platí

$$F(x_0) = x_0\,.$$

Věta

Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor a $F\colon P \to P$ je kontrakce. Pak existuje právě jeden pevný bod zobrazení F