Diferenciální počet funkcí více proměnných

Parciální derivace a spol

Petr Liška

Masarykova univerzita

18.10.2024

Parciální derivace

Definice

Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná v bodě $[x_0, y_0]$. Existuje-li limita

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

řekneme, že funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ *parciální derivaci* podle x s hodnotou této limity.
Tuto derivaci značíme

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)$$

Analogicky definujeme a značíme parciální derivaci podle y.

Věta

Nechť funkce f, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mají parciální derivaci podle proměnné* x_i, $i \in \{1, 2\}$, *na otevřené množině* M. *Pak jejich součet, rozdíl, součin a podíl má na* M *parciální derivaci podle* x_i *a platí*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[f(x) \pm g(x)] = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \pm \frac{\partial}{\partial x_i} g(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[f(x)g(x)] = g(x)\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) + f(x)\frac{\partial}{\partial x_i} g(x),$$

je-li navíc $g(x) \neq 0$, *pak*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) - f(x)\frac{\partial}{\partial x_i} g(x)}{g^2(x)}.$$

Derivace vyšších řádů

Nechť $[x_0, y_0] \in D(f_x)$. Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací funkce 2. řádu* podle x funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme ji $f_{xx}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$.
Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme tuto derivaci *smíšenou parciální derivací 2. řádu* funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme ji $f_{xy}(x_0, y_0)$ nebo také $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.

Analogicky definujeme derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

Věta (Schwarz, Clairaut)

Nechť funkce f má v okolí bodu $[x_0, y_0]$ parciální derivace f_x, f_y a smíšenou parciální derivaci f_{xy}, která je v bodě $[x_0, y_0]$ spojitá. Pak existuje také smíšená parciální derivace $f_{yx}(x_0, y_0)$ a platí

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Definice

Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ *směrovou derivaci* ve směru jednotkového vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$, jestliže existuje limita

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + u_1 h, y_0 + u_2 h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Definice

Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pak *gradientem* funkce f rozumíme vektor ∇f (grad f)

$$\nabla f(x, y) = \left(f_x(x, y), f_y(x, y)\right).$$

Věta

Má-li funkce $f(x, y)$ spojité parciální derivace prvního řádu, pak má funkce směrovou derivaci ve směru libovolného vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$ a platí

$$D_{\vec{u}} f(x, y) = f_x(x, y) u_1 + f_y(x, y) u_2 = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u}.$$

Diferenciál funkce

Definice

Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná v okolí bodu $[x_0, y_0]$ je v tomto bodě *diferencovatelná*, jestliže existují reálná čísla A, B taková, že platí

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - (Ah + Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Lineární funkce $Ah + Bk$ proměnných h, k se nazývá *diferenciál funkce* v bodě $[x_0, y_0]$ a značí se $\mathrm{d}f(x_0, y_0)(h, k)$, případně $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$.
Ekvivalentně: existují A, $B \in \mathbb{R}$ a funkce $\tau\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tak, že platí

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + \tau(h, k),$$

kde

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\tau(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak je v tomto bodě spojitá.

Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak má v tomto bodě parciální derivace a platí

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k.$$

Věta

Má-li funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace 1. řádu, pak má v tomto bodě také diferenciál.

Věta

Má-li funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ totální diferenciál, má graf funkce v tomto bodě tečnou rovinu o rovnici

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Věta

Nechť P, Q jsou spojité funkce proměnných x, y definované na otevřené jednoduše souvislé množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, které mají na této množině spojité parciální derivace P_y, Q_x. Pak výraz $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$ je diferenciálem nějaké funkce, právě když platí

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) \qquad \textit{pro každé} \qquad [x, y] \in \Omega.$$

Funkci z předchozí věty se říká *kmenová funkce* funkcí P a Q.