Diferenciální počet funkcí více proměnných

Vektorové funkce, Taylorova věta a funkce daná implicitně

Petr Liška

Masarykova univerzita

1.11.2024

Vektorová funkce a operátory

V rovině je vektorová funkce takový předpis, který každému bodu z množiny $D \subseteq \mathbb{R}^2$ přiřadí vektor v rovině. Zapisujeme

$$\vec{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big), \tag{1}$$

kde $P(x,y)$, $Q(x,y)$ jsou funkce dvou proměnných. Podobně vektorová funkce v prostoru je takový předpis, který každému bodu z množiny $D \subseteq \mathbb{R}^3$ přiřadí vektor v prostoru. Zapisujeme

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big), \tag{2}$$

kde $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ jsou funkce tří proměnných.

Uvažujme vektorové pole v rovině a označme jednotkové vektory ve směru os x a y

$$\vec{\imath} = (1,0), \qquad \vec{\jmath} = (0,1).$$

Pak vektorové pole (1) lze zapsat

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$$

nebo stručně $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath}$.

https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+a+vector+field

Označíme-li jednotkové vektory ve směru os x, y, a z

$$\vec{\imath} = (1,0,0), \qquad \vec{\jmath} = (0,1,0), \qquad \vec{k} = (0,0,1),$$

pak vektorové pole (2) lze zapsat

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

https://www.geogebra.org/m/u3xregNW

Divergence

Nechť $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ je vektorové pole v prostoru. Jestliže existují parciální derivace P_x, Q_y, R_z, pak *divergence* vektorového pole $\vec{F}$ je skalární funkce

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = P_x(x, y, z) + Q_y(x, y, z) + R_z(x, y, z).$$

Pomocí tzv. Hamiltonova operátoru můžeme divergenci vektorového pole zapsat jako skalární součin

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R).$$

Rotace

Nechť $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ je vektorové pole v prostoru. Jestliže existují všechny parciální derivace 1. řádu, pak *rotace* vektorového pole $\vec{F}$ je vektorové pole definované jako vektorový součin:

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) = \nabla \times \vec{F} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y).$$

Věta

Nechť f je funkce tří proměnných, která má spojité parciální derivace druhého řádu. Pak

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \vec{o}.$$

Věta

Nechť $\vec{F}$ je vektorové pole definované na jednoduše souvislé množině v prostoru, jehož složky jsou spojitě diferencovatelné funkce. Pak

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{F} \quad \textit{je konzervativní.}$$

Taylorova věta

Definice

Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace až do řádu m včetně. *Diferenciálem m-tého řádu* funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ rozumíme funkci

$$\mathrm{d}^m f(x_0, y_0)(h, k) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x_0, y_0) h^j k^{m-j}\,.$$

Věta

Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $n+1$ včetně, pak pro každý bod $[x, y]$ z tohoto okolí platí

$$f(x, y) = T_n(x, y) + R_n(x, y),$$

kde

$$T_n(x, y) = f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)(h, k) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0)(h, k) + \cdots + \frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f(x_0, y_0)(h, k)$$

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\mathrm{d}^{n+1} f(x_0 + \nu h, y_0 + \nu k)(h, k), \qquad \nu \in (0, 1), h = x - x_0, k = y - y_0.$$

Funkce daná implicitně

Definice

Nechť F je funkce dvou proměnných. Označme

$$M = \{[x, y] \in \mathcal{D}(F) \colon F(x, y) = 0\}$$

a nechť $F(x_0, y_0) = 0$. Jestliže existují čísla $\delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ taková, že množina

$$\{[x, y] \in M \colon |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \varepsilon\}$$

je totožná s grafem funkce $y = f(x)$ pro $|x - x_0| < \delta$, řekneme, že funkce f v okolí bodu $[x_0, y_0]$ definována (dána) implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$.

Náš vztah k matematice

$$x^2 + (y - \sqrt[3]{x^2})^2 = 1$$

Descartův list

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad a > 0$$

Věta

Nechť je funkce F spojitá na čtverci

$$R = \{[x, y] \in D(F) \colon |x - x_0| < a, |y - y_0| < a\}$$

a nechť $F(x_0, y_0) = 0$. Dále předpokládejme, že funkce F má spojitou parciální derivaci $\frac{\partial}{\partial y} F(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ a platí $\frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0) \neq 0$. Pak existuje okolí bodu $[x_0, y_0]$, v němž je rovností $F(x, y) = 0$ implicitně definována právě jedna funkce $y = f(x)$, která je spojitá.
Má-li navíc funkce F na R spojité parciální derivace 1. řádu, pak má funkce f derivaci v bodě x_0 a platí

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$